

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 19, HEFT 6, APRIL 1934

Über die freien Schwingungen in Kondensatorkreisen mit periodisch veränderlicher Kapazität

Von Artur Erdélyi

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — Problemstellung. — Über die Lösungen der Differentialgleichung. — Asymptotische Integration im Stabilitätsgebiet. — Berechnung der Breite des Labilitätsgebietes. — Berechnung der instabilen Lösungen. — Ein Beispiel. — Zusammenfassung. — Literaturverzeichnis.

Einleitung

Das Problem der freien Schwingungen eines elektrischen Schwingungskreises mit periodisch veränderlicher Kapazität wurde, wenn auch nicht vollständig befriedigend, von Carson und Emersleben bereits behandelt. Anlaß dazu gaben die Versuche, telephonische Gespräche dadurch zu übertragen, daß man durch die Tonschwingungen Modulationen der Kapazität eines elektrischen Schwingungskreises herbeiführt („Frequenzmodulation“).

Schon Carson¹⁾) hat bemerkt, daß die Differentialgleichung der Schwingungen eines solchen Kreises eine Hillsche Differentialgleichung ist. Anstatt aber die Theorie der Hillschen Differentialgleichung zu Hilfe zu nehmen, glaubte er durch Verwendung eines Näherungsverfahrens schneller zum Ziele zu kommen und anschaulichere Ergebnisse zu erhalten. Sein Resultat ist folgendes: Die Differentialgleichung des Systems lautet

$$(1) \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + 2h f(t)] I = 0, \quad h \ll 1$$

wo $f(t)$ eine „langsam veränderliche“ Funktion ist. Näherungsweise wird die Lösung dieser Differentialgleichung dargestellt durch

$$I = A \cos \left[\omega_0 t + h \int f(t) dt \right].$$

¹⁾ Die hochstehenden Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Die Schwingungen sind also von konstanter Amplitude und variabler Frequenz. Da aber das von ihm verwendete Näherungsverfahren einer eingehenden Kritik nicht standhält und man daher dieses Resultat nicht einmal als qualitativ richtig ansprechen kann, dürfte diesem ersten Versuch zur Behandlung des Problems, so verdienstvoll er an sich ist, keine große Bedeutung zukommen.

Einen Schritt weiter ist Emersleben³⁾ gekommen, dessen Arbeit noch vor der Carsons entstanden ist. Vor allem hat Emersleben richtig bemerkt, daß eine Differentialgleichung von der Form (1) für den Strom gar nicht gültig ist, sondern nur für die Ladung^{*)}, und hat aus diesem Grunde nach der zeitlichen Veränderung der Ladung eines Kondensatorkreises gefragt, dessen Kapazität rein harmonischen Änderungen unterworfen ist. Er transformiert die lineare Differentialgleichung des Kreises auf eine Riccatische und löst diese für kleine Änderungen der Kapazität näherungsweise. Er kommt zu dem Resultat, daß sowohl die Amplitude als auch die Frequenz der Schwingungen im Tempo des Signals (Tonfrequenz) periodische Schwankungen aufweisen. Seine Resultate sind mit Ausnahme der „labilen“ Frequenzbereiche qualitativ richtig, wenn sie auch quantitativ verbesserungsbedürftig sind (vgl. S. 604). Bedauerlicherweise gestattet die von Emersleben angewendete Methode keinen Überblick über das Bildungsgesetz der nach den ersten Gliedern abgebrochenen unendlichen Reihe, so daß auch der Versuch eines Konvergenzbeweises von vornherein aussichtslos erscheint. So mußte ihm auch entgehen, daß für gewisse Frequenzbereiche die Gültigkeit seiner Resultate aufhört. Eine weitergehende Analyse der Untersuchungen von Emersleben hat indessen ergeben, daß es tatsächlich möglich ist, auf die ursprüngliche lineare Differentialgleichung ein Verfahren anzuwenden, das ganz genau dem von Emersleben auf die Riccatische Differentialgleichung angewendetem Verfahren entspricht und dabei einen bequemerem Überblick des allgemeinen Bildungsgesetzes gestattet.^{**)} Man kann zeigen, daß immer dann, wenn $\frac{2\omega_0}{a}$

^{*)} Bei Schwingungskreisen mit konstanter Kapazität genügen bekanntlich Strom, Spannung und Ladung derselben Differentialgleichung.

^{**)} Obwohl dieses Verfahren mehr leistet als das von Emersleben angewandte, soll an dieser Stelle darauf nicht eingegangen werden, weil für die „langsamen“ Kapazitätsschwankungen die von uns in dieser Arbeit verwendete Methode besser geeignet ist. Es wäre etwa von Nutzen bei der Behandlung von kleinen aber raschen Kapazitätsschwankungen (deren Frequenz mit der Eigenfrequenz des Kreises größenordnungsmäßig vergleichbar ist).

(α sei die Kreisfrequenz der Kapazitätsschwankungen) in die Nähe einer ganzen Zahl n fällt, das n -te Glied der Reihe dominierend wird, so daß die näherungsweise Darstellung derselben durch die ersten Glieder ganz versagt. Aus diesem Grunde gelten die Formeln von Emersleben nur dann, wenn $\frac{2\omega_0}{\alpha}$ hinreichend weit von einer ganzen Zahl entfernt ist.

Wenn das vorliegende Problem heute wieder aufgegriffen wird, so waren hierfür namentlich folgende Gründe maßgebend:

Das Verhalten eines Schwingungskreises mit periodisch veränderlicher Kapazität ist über das ursprüngliche Problem hinaus, das seinerzeit Carson und Emersleben den Anlaß zu ihren Arbeiten gab, deshalb von Interesse, weil es typisch für das Verhalten schwingungsfähiger Systeme ist, deren Eigenfrequenz (im Vergleich zu den Eigenschwingungen) langsamen Schwingungen unterworfen ist.

Ferner hat die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten in den letzten Jahren einen Ausbau erfahren, der ihre Anwendung auf Schwingungsprobleme vielfach erst ermöglichte, so daß heute dieses Problem mit viel mehr Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen werden konnte, als vor elf Jahren. Insbesondere war es von Interesse zu untersuchen, ob entsprechend dem Auftreten instabiler Lösungen bei der Hillschen Differentialgleichung Frequenzbereiche vorhanden seien, in denen das schwingende System entdämpft wird, so daß also durch die Kapazitätsschwankungen das System als Generator wirkt.*) Diese Vermutung hat sich in vollem Umfange bestätigt, doch war der Weg zur Bestimmung der instabilen Lösungen nicht ganz einfach, da die in der Theorie der Hillschen Differentialgleichung bisher entwickelten Methoden nicht ausreichten.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das Problem definiert, wobei im wesentlichen die Fassung von Emersleben maßgebend ist. Seine Fragestellung wird einerseits dadurch erweitert, daß man allgemeine Schwingungsformen und beliebige Amplituden der Kapazitätsschwankungen zuläßt, welche nur durch die Bedingung eingeschränkt sind, daß die nach der Thomsonschen Formel gerechnete Eigenfrequenz nie verschwindet (Emersleben hat nur kleine, rein sinusförmige Schwankungen betrachtet), andererseits wird seine Fragestellung dadurch eingeeengt, daß der Widerstand (Dämpfung)

*) Schon van der Pol¹²⁾ hat darauf hingewiesen, daß dies für $\alpha = 2\omega_0$ der Fall ist. Vgl. auch die, mir während der Drucklegung bekanntgewordene Arbeit von W. L. Barrow¹⁹⁾.

als konstant angenommen wird.^{*)} Nach allgemeinen Betrachtungen über die Lösungen der Differentialgleichung unseres Problems, aus denen sich das Verhalten unseres Schwingungskreises bereits ungefähr ergibt, wird zunächst eine näherungsweise Darstellung der Lösungen im stabilen Gebiet gegeben. Da unsere Näherungsmethoden auf der allgemeinen Theorie der Hillschen Differentialgleichung einerseits und auf der Sturm-Liouvilleschen Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung andererseits basieren, ist die Frage ihrer Zulässigkeit positiv zu entscheiden. Dabei erhalten wir Resultate, welche qualitativ die von Emersleben bestätigen, aber (im Gegensatz zu den nur für sehr kleine sinusförmige Kapazitätsschwankungen gültigen Resultate Emerslebens) für beliebige periodische Änderungen der Kapazität gelten, und hier zum ersten Male gegeben werden. Dann wird, unseres Wissens zum ersten Male in der Literatur eine wirkliche, auch für numerische Rechnungen brauchbare Bestimmung der instabilen Intervalle und die Berechnung der Lösungen daselbst gegeben, wobei darauf hingewiesen wird, daß hier ein „Zieh-effekt“ auftritt. Auch das weist auf den Zusammenhang hin, der zwischen linearen Schwingungskreisen mit periodisch schwankender Eigenfrequenz und gewissen nicht-linearen Schwingungskreisen (zu denen z. B. das rückgekoppelte Audion gehört) besteht, bei denen unter ganz ähnlichen Bedingungen „Teilfrequenzschwingungen“ auftreten. Zum Schluß wird ein Beispiel durchgerechnet, in dem besonders einfache Annahmen über die die Kapazitätsmodulationen darstellende Funktion gemacht sind, um die in der allgemeinen Theorie festgestellte Entdämpfung auch an einem konkreten Einzelfall zu zeigen.

Problemstellung

Gegeben sei ein Schwingungskreis mit der Kapazität C , mit dem Widerstande R und der Selbstinduktion L , der folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Belegungen des Kondensators seien nur durch die dünne Schicht eines Isolators getrennt.
2. Die Kapazität des Schließungsdrahtes sei so klein, daß sie gegen die des Kondensators vernachlässigt werden kann.

^{*)} Vielleicht bietet sich noch einmal Gelegenheit, auf den von Emersleben mitbehandelten Fall des variablen Widerstandes, der ganz ähnlich zu behandeln ist, zurückzukommen.

Wie Emersleben³⁾ gezeigt hat, genügt unter diesen Voraussetzungen die Ladung des Kondensators Q der Differentialgleichung

$$(2) \quad L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0.$$

Die Potentialdifferenz der beiden Kondensatorplatten ist aus

$$V = \frac{Q}{C}$$

zu berechnen, und für die Stromstärke bekommt man den Ausdruck:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Wir wollen die freien Schwingungen dieses Kondensatorkreises für den Fall untersuchen, daß Selbstinduktion und Widerstand des Kreises konstant sind, die Kapazität aber eine periodische Funktion der Zeit ist. Wir wollen also annehmen, daß

$$(3) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} [1 + \kappa \Phi(\alpha t)],$$

wo $\Phi(x)$ eine mod 2π periodische Funktion vom Mittelwerte 0 und von der Amplitude 1 ist.

$$(4) \quad \Phi(x + 2\pi) = \Phi(x), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x) dx = 0, \quad |\Phi(x)| \leq 1.$$

α ist die Kreisfrequenz der Kapazitätsschwankungen, C_0 wollen wir die „mittlere Kapazität“ nennen. (Genau gesagt ist $1/C_0$ der Mittelwert der reziproken Kapazität.)

Entsprechend der in der Einleitung geschilderten physikalischen Fragestellung wollen wir annehmen, daß die Kreisfrequenz α der Kapazitätsschwankungen (die Tonfrequenz) sehr klein gegenüber der Eigenfrequenz ω_0 des Schwingungskreises (drahtlose Frequenz) sei.

Da die reziproke Kapazität niemals verschwindet, ist sicher

$$|\kappa| < 1.$$

Da praktisch κ recht erheblich unterhalb dieses Betrages bleibt, werden wir weiter unten [vgl. Gl. (14)] eine etwas weitergehende Voraussetzung über κ machen dürfen.

Unser Ziel ist, die Ladung als Funktion der Zeit unter den genannten Voraussetzungen zu berechnen.

Über die Lösungen der Differentialgleichung

Gl. (2), die Differentialgleichung unseres Problems, ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten und kann daher durch eine Transformation auf die Hillsche Differentialgleichung zurückgeführt werden.*)

Wir setzen:

$$(5) \quad \frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC_0} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_0^2.$$

δ ist das logarithmische Dekrement unseres Schwingungskreises, ω_0 die Frequenz eines Schwingungskreises, dessen konstante Kapazität mit der mittleren Kapazität unseres Schwingungskreises übereinstimmt. Später soll noch gezeigt werden, daß ω_0 nicht mit der „mittleren Frequenz“ der Eigenschwingungen zusammenfällt. Gl. (2) geht dann über in

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + (\omega_0^2 + \delta^2)[1 + \varkappa \Phi(\alpha t)] Q = 0.$$

Durch die Abspaltung des Dämpfungsgliedes in der üblichen Art geht diese Differentialgleichung in eine selbst-adjungierte über. Wir setzen:

$$Q(t) = e^{-\delta t} \cdot q(t)$$

und bekommen für $q(t)$ die Differentialgleichung:

$$(6) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + [\omega_0^2 + (\omega_0^2 + \delta^2) \varkappa \Phi(\alpha t)] q = 0.$$

Wenn wir noch

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right) \varkappa = k$$

setzen, geht Gl. (6) über in

$$(7) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + k \Phi(\alpha t)] q = 0$$

und diese Hillsche Differentialgleichung wird der Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen sein.

Man kann zeigen, daß die Hillsche Differentialgleichung immer eine Lösung von der Form

$$(8) \quad e^{\mu \alpha t} F(\alpha t)$$

*) Bezüglich der Theorie der Hillschen Differentialgleichung sei außer den zitierten Originalarbeiten namentlich auf die Monographie von M. J. O. Strutt¹⁵⁾ verwiesen. Dort sind neben einer kurzen Zusammenstellung der Ergebnisse auch reiche Literaturangaben über die Theorie und Anwendungen dieser Differentialgleichung zu finden.

besitzt, wo $F(\alpha t)$ eine mod 2π periodische Funktion bedeutet,

$$F(\alpha t + 2\pi) = F(\alpha t).$$

Ist

$$\mu \neq 0 \quad \text{und} \quad \mu \neq \frac{1}{2}i,$$

so hat ein zweites von dem ersten linear unabhängiges Integral die Form

$$(9) \quad e^{-\mu \alpha t} G(\alpha t)$$

mit einer ebenfalls mod 2π periodischen Funktion $G(\alpha t)$:

$$G(\alpha t + 2\pi) = G(\alpha t).$$

Dies ist das sogenannte Floquetsche Theorem.⁴⁾ Die beiden Lösungen $e^{\mu \alpha t} F(\alpha t)$ und $e^{-\mu \alpha t} G(\alpha t)$ sind eindeutig bestimmt bis auf je eine multiplikative Konstante und ihre Vertauschung.

Sind $q_1(t)$ und $q_2(t)$ jene Lösungen der Differentialgleichung (7), welche den Anfangsbedingungen

$$(10) \quad \begin{cases} q_1(0) = 1, & q_1'(0) = 0, \\ q_2(0) = 0, & q_2'(0) = 1 \end{cases}$$

genügen, so hat man für die Berechnung der „charakteristischen Exponenten“ μ die Gleichung

$$(11) \quad \cos 2\pi\mu = \frac{1}{2} \left[q_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) + q_2'\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \right].$$

Für gerade periodische Funktionen $\Phi(x)$, für welche also

$$\Phi(-\alpha t) = \Phi(\alpha t),$$

vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$(11a) \quad \cos 2\pi\mu = q_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \quad [\text{vgl. }^{11)}].$$

Da $q_1(t)$ und $q_2(t)$ durch reelle Anfangsbedingungen bestimmte Lösungen der reellen Differentialgleichung (7), also selbst reell sind, so gilt dasselbe von $\cos 2\pi\mu$. Ist dann der aus Gl. (11) bzw. aus Gl. (11a) berechnete Wert

$$|\cos 2\pi\mu| < 1,$$

so ist μ rein imaginär. Die Lösungen (8) und (9) sind dann beide für alle Zeiten t beschränkt. Die Lösung für beliebige Anfangsbedingungen ist eine lineare Kombination von (8) und (9) und wird also immer beschränkt sein, wie auch die Anfangsbedingungen beschaffen sein mögen. Aus diesem Grunde wollen wir diese Lösungen als *stabil* bezeichnen. Ist dagegen

$$\cos 2\pi\mu > 1,$$

so ist μ rein reell, während für

$$\cos 2\pi\mu < -1$$

μ einen von 0 verschiedenen Realteil und den Imaginärteil $\frac{1}{2}$ hat. In beiden Fällen, in denen der Realteil von μ von 0 verschieden ist, wächst eine der Lösungen (8) und (9) unbegrenzt an, während die zweite abklingt. Im allgemeinen wird dann die Lösung bei beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen unbegrenzt zunehmen. Wohl gibt es spezielle Anfangsbedingungen, für welche die Differentialgleichung eine abklingende Lösung besitzt, doch genügt die geringste Änderung in den Anfangsbedingungen, um die Lösung unbegrenzt zunehmen zu lassen, so daß wir in diesem Falle *instabile* Lösungen der Differentialgleichung (7) vor uns haben. Stabile und instabile Lösungen sind durch solche getrennt, für welche

$$\cos 2\pi\mu = \pm 1,$$

also

$$\mu = 0$$

oder

$$\mu = \frac{1}{2}i.$$

Für diese beiden Fälle fallen (8) und (9) im wesentlichen zusammen und ergeben in $t \bmod 2\pi/\alpha$ (für $\mu = 0$) bzw. $\bmod 4\pi/\alpha$ (für $\mu = \frac{1}{2}i$) *periodische* Funktion. Bezeichnen wir diese für den Augenblick mit $u(t)$, so ist die zweite, linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung (7) von der Form

$$(12) \quad v(t) = c \cdot t \cdot u(t) + w(t),$$

wo $w(t)$ eine in $\bmod 2\pi/\alpha$ periodische Funktion von t bedeutet [vgl. ¹⁵⁾ S. 607]. *Ausnahmsweise* kann es vorkommen, daß die Konstante c verschwindet, und auch die zweite Lösung periodisch wird, worauf wir noch zu sprechen kommen.

Bei einer vorgegebenen Funktion $\Phi(\alpha t)$ hängt der Wert von $\cos 2\pi\mu$ von ω_0^2 und k ab. Zu jedem Punkt der Ebene, dessen rechtwinklige Koordinaten ω_0^2 und k sind, gehört ein Wert von $\cos 2\pi\mu$. Jene Punkte, zu denen ein rein imaginärer Wert von μ gehört ($-1 < \cos 2\pi\mu < +1$) erfüllen die *Stabilitätsbereiche*. Jene Punkte dieser Ebene aber, denen ein μ -Wert mit nicht verschwindendem Realteil zugeordnet ist, ergeben die Bereiche der *Instabilität*. Beider Bereiche gibt es unendlich viele. Getrennt voneinander sind sie durch *Grenzkurven*, für die $\mu = 0$ oder $\mu = \frac{1}{2}i$ ist. Zu den ersteren *ganzerperiodischen* Grenzkurven gehört eine Lösung von der Periode $2\pi/\alpha$, also von der Kreisfrequenz α . Es ist üblich,

die zu $\mu = \frac{1}{2}i$ i gehörenden Grenzkurven als halbperiodisch zu bezeichnen. In Anbetracht der Tatsache, daß zu diesen Grenzkurven eine Lösung von der Periode $4\pi/\alpha$, also von der Frequenz $\frac{1}{4}\alpha$ gehört, wäre es vielleicht angebracht, dieselben als *halbfrequent* zu bezeichnen. Längs beider Typen von Grenzkurven hat das zweite Integral die Form (12). Nur in Punkten, in denen sich zwei Grenzkurven schneiden, wird $c = 0$ und auch das zweite Integral periodisch.^{*)}

Da

(13) $Q(t) = e^{-\delta t} q(t) = c_1 e^{(-\delta + \mu\alpha)t} \cdot F(\alpha t) + c_2 e^{(-\delta - \mu\alpha)t} \cdot G(\alpha t)$,
so kann man aus dem eben Gesagten folgende Schlüsse ziehen:

In den Stabilitätsgebieten, in denen μ rein imaginär ist, wird die zeitliche Veränderung der Ladung einer gedämpften Schwingung mit dem logarithmischen Dekrement δ , mit der „natürlichen Dämpfung“ des Systems, entsprechen. Im Instabilitätsgebiet aber, wo μ reell ist (bzw. einen von Null verschiedenen Realteil hat), wird die „scheinbare Dämpfung“ nur

$$\delta - \mu\alpha$$

betragen. Die „Entdämpfung“ kann so weit gehen, daß die scheinbare Dämpfung Null, ja negativ wird. In diesem Falle haben wir es mit einem selbsterregungsfähigen System zu tun.

Asymptotische Integration im Stabilitätsgebiet

Im vorigen Abschnitt konnten wir lediglich durch Anwendung allgemeiner Sätze aus der Theorie der Hillschen Differentialgleichung einiges über das qualitative Verhalten unseres Schwingungskreises aussagen. Namentlich gelang es uns, nachzuweisen, daß unter gewissen, bisher nicht weiter präzisierten Umständen, Selbsterregung auftreten kann. Wollen wir aber mehr quantitative Einzelheiten feststellen, so müssen wir an die Herstellung der Lösungen unserer Differentialgleichung (7) schreiten. Nun ist es bekannt, daß die Lösungen der Hillschen Differentialgleichung [von dem trivialen Fall $k = 0$ und einigen ganz speziellen Funktionen $\Phi(x)$ abgesehen] *nicht* in geschlossener Form dargestellt werden können. Auch die bisherigen Bemühungen, eine Integraldarstellung für die Lösung zu finden, sind als gescheitert zu betrachten. Unter diesen Umständen ist man gezwungen, ein Näherungsverfahren einzuschlagen.

^{*)} Ob solche Schnittpunkte überhaupt vorkommen, hängt von der Beschaffenheit der Funktion $\Phi(x)$ ab.

Wir machen zunächst die Voraussetzung

$$(14) \quad |k| < 1,$$

die in allen praktisch in Betracht kommenden Fällen zulässig ist. Dies vorausgesetzt, ist sicher für alle t

$$1 + k \Phi(\alpha t) > 0,$$

und wir können durch Anwendung der Liouvilleschen Transformation das asymptotische Verhalten der Lösungen unserer Differentialgleichung für große ω_0/α untersuchen [vgl. ¹⁷⁾].*)

Wir setzen:

$$(15) \quad x = 2\pi \frac{\int_0^{\alpha t} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du}{\int_0^{\alpha t} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du}, \quad z(x) = \left[\frac{1 + k \Phi(\alpha t)}{1 + k \Phi(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot q(t)$$

und bekommen durch Einsetzen in (7):

$$(16) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda - k \cdot r(x)] z = 0,$$

oder die mit dieser Differentialgleichung gleichwertige Volterrasche Integralgleichung:

$$(16a) \quad \begin{cases} z(x) = c_3 \cos \sqrt{\lambda} x + c_4 \sin \sqrt{\lambda} x \\ + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x r(\xi) z(\xi) \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) d\xi \end{cases}$$

mit

$$(16b) \quad z(0) = c_3, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = c_4 \sqrt{\lambda}.$$

Dabei wurde

$$(17) \quad \lambda = \left(\frac{E}{2\pi} \frac{\omega_0}{\alpha} \right)^2, \quad E = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du.$$

$$(17a) \quad r(x) = \left(\frac{E}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \frac{\Phi''(\alpha t)}{[1 + k \Phi(\alpha t)]^2} - \frac{5k}{16} \frac{[\Phi'(\alpha t)]^2}{[1 + k \Phi(\alpha t)]^3} \right\}.$$

*) M. J. O. Strutt (a. a. O.) hat als erster diese Transformation aus theoretischen Erwägungen heraus zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des charakteristischen Exponenten der Hillschen Differentialgleichung herangezogen. Schon früher wurde aber L. Dreyfus²⁾ rein empirisch auf die Verwendung der Substitution

$$x = \frac{\omega_0}{\alpha} \int_0^{\alpha t} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du$$

geführt. Die von uns verwendete Transformation ist bis auf die unwesentlichen Normierungskonstanten mit der von Strutt, a. a. O., S. 561 angeführten identisch.

gesetzt.*) Da man (14) auch in der Form

$$1 + k \Phi(\alpha t) \geq \varepsilon > 0$$

schreiben kann, folgt, daß $r(x)$ eine für alle Werte von ω_0 und alle der Bedingung (14) genügende Werte von k beschränkte Funktion ihres Argumentes x ist, wenn die ohnehin als beschränkt vorausgesetzte Funktion $\Phi(\alpha t)$ zweimal differenzierbar ist. Offenbar hat $r(x)$ dieselben Stetigkeitseigenschaften, wie $\Phi(\alpha t)$ und ihre beiden ersten Ableitungen.

Wir werden jetzt zeigen, daß $r(x)$ eine mod 2π periodische Funktion ihres Argumentes ist, daß also auch die Differentialgleichung (16) vom Hillschen Typus ist. Aus Gl. (15) ersieht man, daß immer dann, wenn αt um 2π vermehrt wird, die mit zunehmendem αt monoton wachsende Größe x immer um 2π wächst. Dies folgt daraus, daß wegen der Periodizität von $\Phi(\alpha t)$

$$\int_{\alpha t}^{\alpha t + 2\pi} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du.$$

Wenn man also in Gl. (17a) αt durch $\alpha t + 2\pi$ und im Sinne des soeben Gesagten x durch $x + 2\pi$ ersetzt, ändert sich wegen der Periodizität von $\Phi(\alpha t)$ und ihrer Ableitungen die rechte Seite dieser Gleichung nicht, und man erhält

$$r(x + 2\pi) = r(x).$$

Da die Differentialgleichung (16) vom Hillschen Typus ist, gilt auch für sie das Theorem von Floquet (vgl. S. 591), laut welchem sie zwei Partikulärintegrale von der Form

$$e^{Mx} f(x) \quad \text{und} \quad e^{-Mx} g(x)$$

mit

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{und} \quad g(x + 2\pi) = g(x)$$

besitzt. Wir werden jetzt nachweisen, daß diese beiden Lösungen genau den aus (8) und (9) durch die Transformation (15) entstandenen entsprechen, und daß

$$M = \mu$$

ist. Um dies zu zeigen, machen wir z. B. in $e^{Mx} f(x)$ die Transformation (15) rückgängig und bekommen zunächst wegen

$$q(t) = \left[\frac{1 + k \Phi(\alpha t)}{1 + k \Phi(0)} \right]^{-1/4} \cdot z(x)$$

*) $\Phi'(\alpha t)$, $\Phi''(\alpha t)$ bedeuten die Ableitungen der Funktion $\Phi(\alpha t)$ nach ihrem Argument αt .

für die entsprechende Lösung der Differentialgleichung (7)

$$(18) \quad e^{Mx} \left[\frac{1+k\Phi(\alpha t)}{1+k\Phi(0)} \right]^{-1/4} \cdot f(x).$$

Da sich x bei der Vermehrung von αt um 2π ebenfalls um 2π vergrößert, ist der Zusammenhang von x und αt von der Form

$$(19) \quad x = \alpha t + \chi(\alpha t),$$

wo $\chi(\alpha t)$ eine mod 2π periodische Funktion ihres Argumentes ist. Tatsächlich bekommt man aus Gl. (15) und (17)

$$\begin{aligned} \chi(\alpha t) = x - \alpha t &= \frac{2\pi}{E} \int_0^{\alpha t} \sqrt{1+k\Phi(u)} du - \alpha t \\ &= \frac{2\pi}{E} \int_0^{\alpha t} \left(\sqrt{1+k\Phi(u)} - \frac{E}{2\pi} \right) du, \\ \chi(\alpha t + 2\pi) - \chi(\alpha t) &= \frac{2\pi}{E} \int_{\alpha t}^{\alpha t + 2\pi} \left(\sqrt{1+k\Phi(u)} - \frac{E}{2\pi} \right) du \\ &= \frac{2\pi}{E} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1+k\Phi(u)} - \frac{E}{2\pi} \right) du = 0. \end{aligned}$$

Für x Gl. (19) eingeführt, geht (18) über in

$$e^{M\alpha t} \cdot e^{M\chi(\alpha t)} \left[\frac{1+k\Phi(\alpha t)}{1+k\Phi(0)} \right]^{-1/4} f(x).$$

Der zweite, dritte und vierte Faktor sind mod 2π periodisch in αt und ergeben $F(\alpha t)$; wenn wir noch

$$M = \mu$$

setzen, so ist die volle Übereinstimmung mit (8) nachgewiesen. Ebenso entspricht $e^{-\mu x} g(x)$ der durch (9) dargestellten Funktion. [Natürlich hätten wir ebenso $M = -\mu$ setzen und demgemäß die periodische Funktion mit $G(\alpha t)$ bezeichnen können. Dies hätte jedoch keine wesentliche Änderung, sondern nur die Vertauschung der beiden Lösungen zur Folge.]

Um also (8) und (9) zu finden, genügt es, Lösungen der Differentialgleichung (16) von der Form $e^{\mu x} f(x)$ und $e^{-\mu x} g(x)$ zu suchen. Zur Auffindung dieser Lösungen gehen wir folgendermaßen vor:

Es seien $z_1(x)$ und $z_2(x)$ jene Lösungen der Differentialgleichung (16), welche den Anfangsbedingungen

$$(20) \quad \begin{cases} z_1(0) = 1, & z_1'(0) = 0 \\ z_2(0) = 0, & z_2'(0) = 1 \end{cases}$$

genügen. Dann sind $z_1(x)$ und $z_2(x)$ sicher linear unabhängig, und man kann jede beliebige Lösung, z. B. $e^{\mu x} f(x)$ aus $z_1(x)$ und $z_2(x)$ linear zusammensetzen. Wir setzen

$$e^{\mu x} f(x) = a z_1(x) + b z_2(x).$$

Wenn man diese Identität in x differenziert, bekommt man

$$e^{\mu x} [\mu f(x) + f'(x)] = a z_1'(x) + b z_2'(x).$$

Setzt man beide Male $x = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ \mu f(0) + f'(0) &= b. \end{aligned}$$

Setzt man aber $x = 2\pi$ und berücksichtigt, daß

$$f(2\pi) = f(0)$$

und

$$f'(2\pi) = f'(0),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} e^{2\pi\mu} f(0) &= a \cdot z_1(2\pi) + b \cdot z_2(2\pi) \\ e^{2\pi\mu} [\mu f(0) + f'(0)] &= a \cdot z_1'(2\pi) + b \cdot z_2'(2\pi). \end{aligned}$$

Wenn man in diese Gleichungen die für $x = 0$ erhaltenen Beziehungen einführt, erhält man für a und b ein lineares Gleichungssystem

$$(21) \quad \begin{cases} [e^{2\pi\mu} - z_1(2\pi)] a - z_2(2\pi) \cdot b = 0 \\ -z_1'(2\pi) \cdot a + [e^{2\pi\mu} - z_2'(2\pi)] b = 0, \end{cases}$$

welches nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn seine Determinante

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi\mu} - z_1(2\pi), & -z_2(2\pi) \\ -z_1'(2\pi), & e^{2\pi\mu} - z_2'(2\pi) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Berücksichtigt man bei der Ausrechnung dieser Determinante, daß wegen des Fehlens der ersten Ableitung in der Differentialgleichung die Wronskische Determinante zweier linear unabhängiger Lösungen konstant ist, also

$$z_1(2\pi) \cdot z_2'(2\pi) - z_1'(2\pi) \cdot z_2(2\pi) = z_1(0) \cdot z_2'(0) - z_1'(0) \cdot z_2(0) = 1,$$

so bekommt man

$$\mathfrak{C}os\,2\pi\mu = \frac{1}{2}[z_1(2\pi) + z_2'(2\pi)],$$

eine Beziehung, die aus der allgemeinen Theorie der Hill'schen Differentialgleichung bekannt ist, und die wir auch früher schon verwendet haben [vgl. Gl. (11)]. Es ist dann

$$\mathfrak{S}in\,2\pi\mu = \sqrt{\mathfrak{C}os^2\,2\pi\mu - 1} = \{(\frac{1}{2}[z_1(2\pi) + z_2'(2\pi)]^2 - 1\}^{1/2},$$

$$e^{2\pi\mu} = \mathfrak{C}os\,2\pi\mu + \mathfrak{S}in\,2\pi\mu.$$

In $e^{\mu x}f(x)$ ist noch ein willkürlicher konstanter Faktor vorhanden, den wir durch die Forderung

$$f(0) = 1$$

bestimmen, die sicher immer erfüllt werden kann, wenn nur

$$f(0) \neq 0.^*)$$

Dann ist

$$a = 1$$

und aus Gl. (21) bekommen wir

$$b = \frac{e^{2\pi\mu} - z_1(2\pi)}{z_2(2\pi)} = \frac{1}{z_2(2\pi)} \left\{ -\frac{1}{2}[z_1(2\pi) - z_2'(2\pi)] + \mathfrak{S}in\,2\pi\mu \right\}$$

und schließlich

$$(22) \quad e^{\mu x}f(x) = z_1(x) + \left\{ -\frac{1}{2}[z_1(2\pi) - z_2'(2\pi)] + \mathfrak{S}in\,2\pi\mu \right\} \frac{z_2(x)}{z_2(2\pi)}.$$

$e^{-\mu x}g(x)$ bekommt man dadurch, daß man μ durch $-\mu$ ersetzt.

$$(22a) \quad \begin{cases} e^{-\mu x}g(x) = z_1(x) \\ \quad + \left\{ -\frac{1}{2}[z_1(2\pi) - z_2'(2\pi)] - \mathfrak{S}in\,2\pi\mu \right\} \frac{z_2(x)}{z_2(2\pi)}. \end{cases}$$

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel zur asymptotischen Berechnung der partikulären Integrale $e^{\mu\alpha t}F(\alpha t)$ und $e^{-\mu\alpha t}G(\alpha t)$ der Differentialgleichung (7) beisammen und können die Berechnung, wie folgt, vornehmen. Zunächst gewinnen wir aus der Integralgleichung (16a) asymptotische Ausdrücke für $z_1(x)$ und $z_2(x)$. Dann berechnen wir $z_1(2\pi)$, $z_2'(2\pi)$ und $\mathfrak{S}in\,2\pi\mu$. Zur Berechnung von $\mathfrak{S}in\,2\pi\mu$ auf dem von uns einzuschlagenden Wege werden wir voraussetzen müssen, daß wir uns im Stabilitätsgebiete befinden.**). Alle Rechnungen bis zu diesem Punkt sind ohne diese Einschränkung gültig, von da ab beeinflußt diese Voraussetzung unsere Resultate ganz wesentlich. Dann können wir aus Gl. (22) $e^{\mu x}f(x)$ berechnen; durch Ausführung der Trans-

*) Da $f(x)$ sicherlich nicht für alle Werte von x verschwindet, kann man diese Ungleichung nötigenfalls durch eine Verschiebung des Nullpunktes immer erfüllen.

**) Vgl. S. 601.

formation (15) bekommen wir $e^{\mu \alpha t} F(\alpha t)$. Ganz analog ergibt sich $e^{-\mu \alpha t} G(\alpha t)$. Aus Gl. (13) erhalten wir schließlich $Q(t)$.

Die Anfangsbedingungen (20) ergeben, in Gl. (16b) und (16a) eingesetzt, für $z_1(x)$ und $z_2(x)$ die beiden Volterra'schen Integralgleichungen:

$$(23) \quad z_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x r(\xi) \cdot z_1(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot d\xi,$$

$$(23a) \quad z_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x r(\xi) \cdot z_2(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot d\xi.$$

Wenn man die Lösungen dieser Integralgleichungen in die Neumannsche Reihe entwickelt, wird diese nach Potenzen von $k/\sqrt{\lambda}$ fortschreiten. Wir werden gleich nach dem zweiten Gliede abbrechen, so daß wir die Glieder von der Ordnung k^2/λ bereits vernachlässigen. Überlegen wir einmal die Größenordnung von $k/\sqrt{\lambda}$, um die Berechtigung dieses Verfahrens einzusehen! $E/2\pi$ ist von der Größenordnung 1, ω_0 (die drahtlose Frequenz) von der Größenordnung 10^6 , α (die Tonfrequenz) etwa von der Größenordnung 10^3 . Infolgedessen wird

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{E} \frac{\alpha}{\omega_0} = O(10^{-3})$$

sein. Der Betrag von k ist sicher kleiner als 1, so daß $k/\sqrt{\lambda}$ höchstens von der Größenordnung 10^{-3} ist. Meistens wird aber k selbst klein sein, etwa von der Ordnung 10^{-1} oder 10^{-2} . Dann wird $k/\sqrt{\lambda}$ sogar von der Größenordnung 10^{-4} bzw. 10^{-5} sein, so daß wir uns erst recht mit der oben angegebenen Näherung begnügen können.

Wenn wir mit den Ansätzen

$$z_1(x) = \beta_0(x) + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \beta_1(x) + \dots,$$

$$z_2(x) = \beta_0^*(x) + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \beta_1^*(x) + \dots$$

in die Integralgleichungen (23) und (23a) eingehen, bekommen wir

$$\beta_0(x) = \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$\beta_0^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \sqrt{\lambda} x$$

und die Rekursionsformel

$$\beta_\nu(x) = \int_0^x r(\xi) \cdot \beta_{\nu-1}(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot d\xi \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

die auch für die $\beta_v^*(x)$ gilt. Aus ihr rechnen wir aus

$$\begin{aligned}\beta_1(x) &= \int_0^x r(\xi) \cdot \beta_0(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot d\xi \\ &= \int_0^x r(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot \cos \sqrt{\lambda}\xi \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda}x \cdot \int_0^x r(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\xi) \cdot r(\xi) \cdot d\xi \\ &= r_1(x) \cdot \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\end{aligned}$$

wobei

$$(24) \quad r_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(\xi) \cdot d\xi$$

gesetzt wurde. Analog ist

$$\begin{aligned}\beta_1^*(x) &= \int_0^x r(\xi) \cdot \beta_0^*(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \cdot d\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[r_1(x) \cdot \cos \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right].\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}z_1(x) &= \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \cdot \sin \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right), \\ z_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\sin \sqrt{\lambda}x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \cdot \cos \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right], \\ z_1(2\pi) &= \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right), \\ z_2(2\pi) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\sin 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right], \\ z_2'(2\pi) &= \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\pi\mu &= \frac{1}{2} [z_1(2\pi) + z_2'(2\pi)] \\ &= \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\pi\mu &= \sqrt{\cos^2 2\pi\mu - 1} \\ &= \left\{ \left[\cos 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right]^2 - 1 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ -\sin^2 2\pi\sqrt{\lambda} + 2\frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \cdot \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Wenn das erste Glied in der Klammer überwiegt, ist $\sin 2\pi\mu$ und auch μ imaginär, wir befinden uns im Stabilitätsgebiet. Man kann immer dann, wenn

$$\sin^2 2\pi\sqrt{\lambda} \gg \frac{k}{\sqrt{\lambda}},$$

das erste Glied herausheben und nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln. Befinden wir uns aber im labilen Bereich, wo $\sin 2\pi\mu$ reell ist, so wird $\sin 2\pi\sqrt{\lambda}$ selbst von der Ordnung $k/\sqrt{\lambda}$, und es ist nicht möglich, auf diesem Wege für $\sin 2\pi\mu$ einen asymptotischen Ausdruck zu bekommen. Wir sehen also, daß immer, wenn $2\pi\sqrt{\lambda}$ in der Nähe von $n\pi$ liegt, also λ in der Nähe von $(\frac{1}{2}n)^2$, ein labiles Intervall für λ vorhanden sein kann. Im Stabilitätsbereich kann man aber unter der oben angegebenen Voraussetzung schreiben

$$\begin{aligned} \sin 2\pi\mu &= i \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \\ &\cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \cotg 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Die oben gemachte Voraussetzung kann man auch so schreiben:

$$\left| \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot \cotg 2\pi\sqrt{\lambda} \right| \ll 1$$

und bekommt unter dieser Voraussetzung, die, wie gesagt, nur im Stabilitätsgebiet statthaft ist,

$$\sin 2\pi\mu =$$

$$\begin{aligned} &i \cdot \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \cdot \left\{ 1 - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \cotg 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right\} \\ &= i \left\{ \sin 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{2} [z_1(2\pi) - z_2'(2\pi)] = O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right),$$

also

$$(25) \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{2} [z_1(2\pi) - z_2'(2\pi)] \pm \sin 2\pi\mu \\ &= \pm i \left\{ \sin 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(2\pi) \cdot \cos 2\pi\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Unter den bereits gemachten Voraussetzungen bekommt man für

$$\frac{z_2(x)}{z_2(2\pi)} = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sin 2\pi \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{2 \cdot \sin^2 2\pi \sqrt{\lambda}} \cdot \left[r_1(2\pi) \cdot \cos 2\pi \sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} x - r_1(x) \cdot \cos \sqrt{\lambda} x \cdot \sin 2\pi \sqrt{\lambda} \right] + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right)$$

und aus GL (22) bekommt man dann

$$\begin{aligned} e^{\mu x} f(x) &= \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right) \\ &+ i \left\{ \sin \sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right) \right\} \\ &= \left[1 - i \cdot \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \right] e^{i \sqrt{\lambda} x} + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

was man auch so schreiben kann:

$$e^{\mu x} f(x) = e^{i \left[\sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} r_1(x) \right]} + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right).$$

Ganz analog bekommt man

$$e^{-\mu x} g(x) = e^{-i \left[\sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} r_1(x) \right]} + O\left(\frac{k^3}{\lambda}\right).$$

Wir gehen jetzt daran, in $e^{\mu x} f(x)$ bzw. in $e^{-\mu x} g(x)$ die Variable x wieder in t auszudrücken. Zunächst ist sicher

$$r_1(x) = \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \cdot x + \psi(x)$$

mit

$$\psi(x + 2\pi) = \psi(x).$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \psi(x) &= r_1(x) - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \cdot x = \frac{1}{2} \int_0^x r(\xi) \cdot d\xi - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \cdot \int_0^x d\xi \\ &= \int_0^x \left[\frac{1}{2} \cdot r(\xi) - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] d\xi \\ \psi(x + 2\pi) - \psi(x) &= \int_x^{x+2\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot r(\xi) - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] d\xi \end{aligned}$$

und, da $r(\xi)$ eine in $\xi \bmod 2\pi$ periodische Funktion ist,

$$\psi(x + 2\pi) - \psi(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\xi) \cdot d\xi - r_1(2\pi) = 0.$$

Folglich ist

$$\sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) = \sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{k}{\lambda} \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] \cdot x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot \psi(x).$$

Führt man in dieser Formel Gl. (19) ein, so erhält man

$$\sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) = \sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] \alpha t + \varphi(\alpha t)$$

mit

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha t) = \sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{k}{\lambda} \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] \chi(\alpha t) - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \psi(x), \\ \varphi(\alpha t + 2\pi) = \varphi(\alpha t). \end{cases}$$

Man kann leicht zeigen, daß $r_1(2\pi) = 0(k)$ ist, und kann infolgedessen $\frac{k^2}{\lambda} \frac{r_1(2\pi)}{2\pi k}$ gegen 1 vernachlässigen. So erhält man näherungsweise

$$\sqrt{\lambda} x - \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot r_1(x) \doteq \sqrt{\lambda} \alpha t + \varphi(\alpha t)$$

und indem noch

$$\sqrt{\lambda} = \frac{E}{2\pi} \frac{\omega_0}{\alpha}$$

eingeführt wird

$$e^{\mu x} f(x) \doteq e^{i \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) \right]},$$

$$e^{-\mu x} g(x) \doteq e^{-i \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) \right]},$$

$$e^{\mu \alpha t} F(\alpha t) \doteq \left[\frac{1+k \Phi(\alpha t)}{1+k \Phi(0)} \right]^{-1/4} e^{i \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) \right]},$$

$$e^{-\mu \alpha t} G(\alpha t) \doteq \left[\frac{1+k \Phi(\alpha t)}{1+k \Phi(0)} \right]^{-1/4} e^{-i \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) \right]}.$$

Bedeutend A und φ_0 zwei beliebige Konstanten, so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7):

$$q(t) = A \left[\frac{1+k \Phi(\alpha t)}{1+k \Phi(0)} \right]^{-1/4} \cdot \cos \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) + \varphi_0 \right]$$

und die Ladung

$$(27) \quad Q(t) = A \left[\frac{1+k \Phi(\alpha t)}{1+k \Phi(0)} \right]^{-1/4} \cdot e^{-\delta t} \cos \left[\frac{E}{2\pi} \omega_0 t + \varphi(\alpha t) + \varphi_0 \right].$$

Wenn man die Werte von $\sqrt{\lambda}$, $\chi(\alpha t)$, $\psi(x)$ in Gl. (26) einsetzt, bekommt man

$$\varphi(\alpha t) = \frac{\omega_0}{\alpha} \int_0^{\alpha t} \left(\sqrt{1 + k \Phi(u)} - \frac{E}{2\pi} \right) du \\ - k \frac{2\pi}{E} \frac{\alpha}{\omega_0} \int_0^x \left[\frac{1}{2} \cdot r(\xi) - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \right] d\xi.$$

Wenn man hierin

$$\frac{1}{2} \cdot r(\xi) = \left\{ \frac{1}{8} \frac{\Phi''(u)}{[1 + k \Phi(u)]^3} - \frac{5}{32} k \frac{[\Phi'(u)]^2}{[1 + k \Phi(u)]^3} \right\} \left(\frac{E}{2\pi} \right)^2, \\ d\xi = \frac{2\pi}{E} \sqrt{1 + k \Phi(u)} du$$

einführt, bekommt man

$$(27a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\alpha t) &= \frac{\omega_0}{\alpha} \int_0^{\alpha t} \left(\sqrt{1 + k \Phi(u)} - \frac{E}{2\pi} \right) du \\ &- k \frac{\alpha}{\omega_0} \int_0^{\alpha t} \left\{ \frac{1}{8} \frac{\Phi''(u)}{[1 + k \Phi(u)]^{3/2}} - \frac{5}{32} k \frac{[\Phi'(u)]^2}{[1 + k \Phi(u)]^{5/2}} \right\} \left(\frac{E}{2\pi} \right)^2 du \\ &- \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \sqrt{1 + k \Phi(u)} \} du. \end{aligned} \right.$$

Aus Gl. (27) ersehen wir, daß die Ladung des Kondensators, solange wir im stabilen Bereich sind, gedämpfte Schwingungen mit der „natürlichen Dämpfung“ des Systems ausführt. Die Amplitude dieser Schwingungen ist mit der Tonfrequenz α veränderlich. Ihre Veränderungen sind im allgemeinen mit $\Phi(\alpha t)$ nicht proportional; nur für ganz kleine Werte von k bzw. α besteht eine annähernde Proportionalität.*) Die periodisch schwankende Phase kann in der bekannten Art als Frequenzschwankung gedeutet werden. Man erhält das Resultat, daß die Frequenz der Schwingungen um ihren Mittelwert $\frac{E}{2\pi} \omega_0$ herum Schwankungen ausführt. Im Gegensatz zu Carson und Emersleben (a. a. O.) finden wir also, daß die „mittlere Frequenz“ des Schwingungskreises nicht mit ω_0 übereinstimmt. Dagegen kann man nachweisen, daß die für konstante Kapazität gewonnene Thomsonsche Formel

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

*) Vgl. Emersleben a. a. O.

auch für den Fall einer periodisch veränderlichen Kapazität annähernd gültig ist.)*

Nach Carson [¹) S. 63] ist die Frequenz einer Schwingung von der Form $\cos W(t)$ durch den Ausdruck $W'(t)$ gegeben. Nach dieser Definition bekommt man aus Gl. (27) für die Frequenz der freien Schwingungen

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{E}{2\pi} \omega_0 + \alpha \varphi'(\alpha t) = \frac{E}{2\pi} \omega_0 + \omega_0 \left(\sqrt{1 + k \Phi(\alpha t)} - \frac{E}{2\pi} \right) \\ &- k \left(\frac{\alpha}{\omega_0} \right)^2 \omega_0 \left\{ \frac{1}{8} \frac{\Phi''(\alpha t)}{[1 + k \Phi(\alpha t)]^{3/2}} - \frac{5k}{32} \frac{[\Phi'(\alpha t)]^2}{[1 + k \Phi(\alpha t)]^{5/2}} \right. \\ &\left. - \frac{r_1(2\pi)}{2\pi} \sqrt{1 + k \Phi(\alpha t)} \right\}\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck stimmt bis auf Glieder höherer Ordnung mit dem von der Thomsonschen Formel gelieferten Wert

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + k \Phi(\alpha t)}$$

überein.

Berechnung der Breite des Labilitätsgebietes

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda - k \cdot r(x)] z = 0$$

aus, in der $r(x)$ eine mod 2π periodische Funktion ist. Aus der allgemeinen Theorie der Hillschen Differentialgleichung ist es bekannt, daß stabile und labile Gebiete der (λ, k) -Ebene durch Grenzkurven getrennt sind, längs welcher die Differentialgleichung eine mod 2π bzw. mod 4π periodische Lösung besitzt.^{5) **)} Für alle Punkte dieser Ebene, die zwischen zwei ganzperiodischen (oder zwei halbfrequenten) Grenzkurven liegen, sind die Lösungen der Differentialgleichung instabil.

Wir stellen uns demgemäß die Aufgabe, diejenigen Werte des Parameters λ zu bestimmen, für welche die Differentialgleichung (16) eine mod 2π bzw. mod 4π periodische Lösung besitzt. Die Bestimmung der periodischen Lösungen werden wir in Anlehnung an die Methode durchführen, die Mathieu zur Bestimmung der Funktionen des elliptischen Zylinders angewendet hat.⁹⁾ Mathieu setzt für den ersten Näherungswert

*) Hierauf machte mich gelegentlich Herr Prof. Dr. Jaumann aufmerksam.

**) Vgl. auch S. 592 dieser Arbeit.

für die periodischen Lösungen der nach ihm benannten Differentialgleichung

$$(28) \quad \cos \frac{1}{2} n x \quad \text{bzw.} \quad \sin \frac{1}{2} n x^*)$$

und iteriert sie dann für kleine k . Dasselbe erreicht man, wenn man die Lösung nach Potenzen von k entwickelt und für den Koeffizienten der 0-ten Potenz von k Gl. (28) setzt. Wir werden diese Methode insofern abändern, als wir nicht nach Potenzen von k , sondern nach Potenzen von $1/n$ entwickeln. Dann werden unsere Entwicklungen für beliebige, der Bedingung (14) genügende Werte von k und sehr große n gelten. Demgemäß werden wir auch nicht die Differentialgleichung (16), sondern eine aus ihr abgeleitete Integralgleichung verwenden, die allerdings von der schon verwendeten Integralgleichung (16a) verschieden ist.

Ein zweiter Unterschied ist der, daß wir nicht ohne weiteres für die erste Näherung $\cos \frac{1}{2} n x$ bzw. $\sin \frac{1}{2} n x$ setzen dürfen, sondern eine lineare Kombination aus \cos und \sin nehmen müssen. Wie Särchinger¹⁴⁾ gezeigt hat, besteht die Fourier-Entwicklung einer periodischen Lösung der Mathieuschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (\lambda + \gamma \cos x) z = 0$$

entweder nur aus \cos -Gliedern, oder aber nur aus \sin -Gliedern. Daraus kann man folgern, daß sich ein beliebiges periodisches Integral mit verschwindendem k entweder auf $\cos \frac{1}{2} n x$ oder auf $\sin \frac{1}{2} n x$ (und nicht etwa auf eine lineare Kombination der beiden) reduziert. Unseres Wissens sind bisher keine Untersuchungen darüber angestellt worden, ob und unter welchen Bedingungen die allgemeine Hillsche Differentialgleichung dasselbe Verhalten zeigt.^{**)} Im Laufe unserer Untersuchungen werden wir auch ganz zwangsläufig auf die Beantwortung dieser Frage geführt.

Wir setzen

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} n\right)^2 - \lambda',$$

dann geht unsere Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} n\right)^2 z - [\lambda' + k \cdot r(x)] z = 0$$

*) $n \equiv 0 \pmod{2}$ ganzperiodische, $n \equiv 1 \pmod{2}$ halbfrequente Lösungen.

**) Die Formulierung des letzten Absatzes in II. 4. b) auf S. 23 in ¹⁵⁾ legt die Vermutung nahe, daß man, ohne es klar auszusprechen, dies annahm.

oder in die damit gleichwertige Integralgleichung

$$z(x) = c_5 \cos \frac{1}{2} n x + c_6 \sin \frac{1}{2} n x \\ + \frac{2}{n} \int_0^x [\lambda' + k \cdot r(\xi)] \cdot \sin \frac{1}{2} n (x - \xi) \cdot z(\xi) \cdot d\xi.$$

Bis auf einen unwesentlichen konstanten Faktor kann man

$$c_5 \cos \frac{1}{2} n x + c_6 \sin \frac{1}{2} n x = \cos \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right)$$

setzen und bekommt die Integralgleichung

$$z(x) = \cos \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right) \\ + \frac{2}{n} \int_0^x [\lambda' + k \cdot r(\xi)] \sin \frac{1}{2} n (x - \xi) \cdot z(\xi) \cdot d\xi,$$

in welcher die Parameter λ' , η so zu bestimmen sind, daß $z(x)$ eine mod 2π bzw. 4π periodische Funktion wird.

Wir setzen

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{2}{n} \lambda_1 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 \lambda_2 + \dots$$

und

$$z(x) = z_0(x) + \frac{2}{n} \cdot z_1(x) + \left(\frac{2}{n} \right)^2 \cdot z_2(x) + \dots$$

und gehen mit diesem Ansatz in die Volterrasche Integralgleichung ein. Wenn wir dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $2/n$ beiderseits gleichsetzen, bekommen wir

$$z_0(x) = \cos \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right), \\ z_v(x) = \int_0^x [\lambda_0 + k \cdot r(\xi)] \sin \frac{1}{2} n (x - \xi) \cdot z_{v-1}(\xi) \cdot d\xi \\ + \sum_{e=1}^{v-1} \lambda_e \int_0^x \sin \frac{1}{2} n (x - \xi) \cdot z_{v-e-1}(\xi) \cdot d\xi. \\ (v = 1, 2, 3, \dots)$$

Aus diesen Rekursionsformeln kann man die $z_v(x)$ berechnen. Zur Bestimmung der λ_v muß man dann die Bedingung heranziehen, daß die $z_v(x)$ periodisch sein müssen. Wir werden diese Rechnung im Falle der $z_1(x)$ tatsächlich durchführen. Dabei erhalten wir ein Resultat, das für unsere Zwecke genau genug ist. Die Weiterführung der Rechnungen müßte nach

derselben Methode erfolgen und macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Wir setzen die Fourier-Entwicklung der mod 2π periodischen Funktion in der Form

$$(29) \quad k \cdot r(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cos(\nu x - \varepsilon_{\nu})$$

an. Im Gegensatz zu $\Phi(\alpha t)$ ist der Mittelwert von $r(x)$ im allgemeinen von Null verschieden, so daß die Summation bei $\nu = 0$ beginnen muß. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \int_0^x [\lambda_0 + k \cdot r(\xi)] \sin \frac{1}{2} n(x - \xi) \cdot z_0(\xi) \cdot d\xi \\ &= \int_0^x \left[\lambda_0 + \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cos(\nu \xi - \varepsilon_{\nu}) \right] \sin \frac{1}{2} n(x - \xi) \\ &\quad \cdot \cos \left(\frac{1}{2} n \xi - \eta \right) \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right) \cdot \int_0^x \left[\lambda_0 + \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cos(\nu \xi - \varepsilon_{\nu}) \right] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\lambda_0 + \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cos(\nu \xi - \varepsilon_{\nu}) \right] \sin \left[\frac{1}{2} n(x - 2\xi) + \eta \right] d\xi; \\ z_1(x) &= \frac{1}{2} (\lambda_0 + \gamma_0) x \cdot \sin \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right) \\ &\quad \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{\nu} [\sin(\nu x - \varepsilon_{\nu}) + \sin \varepsilon_{\nu}] \\ &\quad + \frac{1}{2n} (\lambda_0 + \gamma_0) \left[\cos \left(\frac{1}{2} n x - \eta \right) - \cos \left(\frac{1}{2} n x + \eta \right) \right] \\ &\quad + \frac{\gamma_n}{4} x \cdot \sin \left(\frac{1}{2} n x + \eta - \varepsilon_n \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{n - \nu} \left\{ \cos \left[\left(\nu - \frac{1}{2} n \right) x + \eta - \varepsilon_{\nu} \right] \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{1}{2} n x + \eta - \varepsilon_{\nu} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{n + \nu} \left\{ \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} n \right) x - \eta - \varepsilon_{\nu} \right] \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{1}{2} n x + \eta + \varepsilon_{\nu} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei \sum' die Summe bedeutet, in dem das Glied mit dem verschwindenden Nenner fehlt. Da $z_1(x)$ periodisch sein soll, müssen die mit dem Faktor x behafteten Glieder verschwinden. Es muß also

$$\frac{1}{2}(\lambda_0 + \gamma_0) \cdot \sin(\frac{1}{2}n x - \eta) + \gamma_n \frac{1}{4} \cdot \sin(\frac{1}{2}n x + \eta - \epsilon_n) = 0$$

sein. Dies kann nur dann für alle x identisch erfolgen, wenn

$$\sin(\frac{1}{2}n x - \eta) = \pm \sin(\frac{1}{2}n x + \eta - \epsilon_n),$$

also entweder

$$\frac{1}{2}n x - \eta = \frac{1}{2}n x + \eta - \epsilon_n, \quad \eta = \frac{1}{2}\epsilon_n$$

oder

$$\frac{1}{2}n x - \eta = -\pi + \frac{1}{2}n x + \eta - \epsilon_n, \quad \eta = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\epsilon_n.$$

Im ersten Fall bekommt man

$$\lambda_0 + \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_n = 0,$$

$$\lambda_0 = -(\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_n),$$

im zweiten Falle

$$\lambda_0 + \gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_n = 0,$$

$$\lambda_0 = -(\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_n).$$

Wir sehen also, daß zu

$$(30) \quad \lambda \doteq (\frac{1}{2}n)^2 + (\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_n)$$

eine periodische Lösung gehört, die für großes n näherungsweise durch

$$\cos(\frac{1}{2}n x - \frac{1}{2}\epsilon_n)$$

dargestellt wird, und daß zu

$$(30a) \quad \lambda \doteq (\frac{1}{2}n)^2 + (\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_n)$$

ebenfalls eine periodische Lösung mit der asymptotischen Darstellung

$$\cos(\frac{1}{2}n x - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\epsilon_n) = \sin(\frac{1}{2}n x - \frac{1}{2}\epsilon_n)$$

gehört. Dieses Resultat gilt unter der Voraussetzung, daß die Fourierreihe für $r(x)$ gleichmäßig konvergiert, und das ist sicher der Fall, wenn $\Phi(\alpha t)$ samt den ersten beiden Ableitungen stetig ist. Dabei ist

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k \cdot r(\xi) d\xi \\ &= \frac{E}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{k}{4} \frac{\Phi''(u)}{[1 + k\Phi(u)]^{3/2}} - \frac{5k^2}{16} \frac{[\Phi'(u)]^2}{[1 + k\Phi(u)]^{5/2}} \right\} du, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (31a) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_n \cos \varepsilon_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k \cdot r(\xi) \cdot \cos n \xi \cdot d\xi \\ &= \frac{E}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{k}{4} \frac{\Phi''(u)}{[1+k\Phi(u)]^{1/2}} - \frac{5k^2}{16} \frac{[\Phi'(u)]^2}{[1+k\Phi(u)]^{3/2}} \right\} \\ &\quad \cdot \cos \left(n \int_0^u \sqrt{1+k\Phi(v)} dv \right) \cdot du, \end{aligned} \right. \\
 (31b) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_n \sin \varepsilon_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k \cdot r(\xi) \cdot \sin n \xi \cdot d\xi \\ &= -\frac{E}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{k}{4} \frac{\Phi''(u)}{[1+k\Phi(u)]^{1/2}} - \frac{5k^2}{16} \frac{[\Phi'(u)]^2}{[1+k\Phi(u)]^{3/2}} \right\} \\ &\quad \cdot \sin \left(n \int_0^u \sqrt{1+k\Phi(v)} dv \right) \cdot du. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Jetzt kann man die auf S. 606 gestellte Frage folgendermaßen beantworten: Die allgemeine Hillische Differentialgleichung mit einer zweimal stetig differenzierbaren periodischen Funktion zeigt asymptotisch für große λ (oder für kleine k) dasselbe Verhalten der periodischen Lösungen, wie (ihr Spezialfall) die Mathieusche Differentialgleichung, wenn die in ihr enthaltene periodische Funktion $\Phi(u)$ gerade ist. In diesem Falle ist nämlich auch $r(x)$ gerade und es verschwinden *alle* ε_n . Unbeschadet dieses allgemeinen Satzes ist es durchaus möglich, daß bei nichtgeraden Funktionen $\Phi(u)$ *einzelne* ε_n verschwinden und sich daher einige der periodischen Lösungen für große n auf $\cos \frac{1}{2} n x$ und $\sin \frac{1}{2} n x$ reduzieren.*)

Aus Gl. (17) und Gl. (30) und (30a) erhalten wir für die Frequenzen, bei denen periodische Lösungen auftreten:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{E} \alpha \sqrt{\lambda} \pm \frac{2\pi}{E} \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2 + \left(\gamma_0 \pm \frac{1}{2}\gamma_n\right)},$$

*) Wir haben dieses Verhalten nur für große n bewiesen, man kann aber für kleine k einen analogen Beweis führen. Darauf wollen wir an dieser Stelle um so weniger eingehen, als diese Betrachtung für unsere weiteren Untersuchungen nicht von Belang ist. Wir behalten uns vor, auf die periodischen und instabilen Lösungen der Hillischen Differentialgleichung an anderer Stelle zurückzukommen.

oder

$$(32) \quad \omega_0 \doteq \frac{1}{2} n \alpha \cdot \frac{2\pi}{E} + \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{2\pi}{E} \left(\gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_n \right)$$

und

$$(32a) \quad \omega_0 \doteq \frac{1}{2} n \alpha \cdot \frac{2\pi}{E} + \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{2\pi}{E} \left(\gamma_0 - \frac{1}{2} \gamma_n \right).$$

Die labilen Frequenzen, d. h. diejenigen Frequenzen, für welche die Differentialgleichung (16) instabil ist, liegen zwischen den beiden soeben angegebenen.*) Die Breite des labilen Frequenzstreifens ist also

$$\frac{\alpha}{n} \frac{2\pi}{E} \gamma_n.$$

Für sehr große n wird der labile Frequenzbereich sehr schmal, er existiert aber im allgemeinen. Aus Gl. (31) zeigt man leicht, daß für kleine k

$$\gamma_0 = O(k^2)$$

und

$$\gamma_n \doteq \frac{k}{4} \cdot a_n,$$

wenn a_n die Amplitude der n -ten Oberschwingung von $\Phi(\alpha t)$ ist. In der ersten Ordnung in k gerechnet ist das labile Intervall nur dann vorhanden, wenn $\Phi(\alpha t)$ eine n -te Oberschwingung enthält. Der genaue Wert von γ_n ist aber im allgemeinen selbst dann von Null verschieden, wenn die n -te Oberschwingung nicht vorhanden ist.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die labilen Frequenzbereiche um so schmaler sind, je größer n oder ω_0/α und je kleiner k bzw. x . Dieser Sachverhalt war auch rein physikalisch zu erwarten, da die im labilen Gebiet auftretende „Anfachung“ weder bei $x = 0$, noch bei $\alpha = 0$ (konstante Kapazität) auftritt. Dieses Ergebnis ist auch in Übereinstimmung mit unseren früheren Aussagen (vgl. S. 601), wo wir feststellen konnten, daß die Breite des labilen Intervalles mit klein werdendem $k/\sqrt{\lambda}$ ebenfalls sehr klein wird, und den gleichlautenden Ergebnissen von Strutt.¹⁷⁾

Wenn man γ_n nach Potenzen von k entwickelt, wird das erste Glied in der Entwicklung $\frac{k}{4} \cdot a_n$ lauten und wird von Null nur dann verschieden sein, wenn $\Phi(\alpha t)$ eine n -te Oberschwingung enthält. Bei Tonkurven, welche eine n -te Oberschwingung nicht enthalten, tritt eine „Entartung“ ein; in erster

*) Welche von beiden größer ist, hängt vom Vorzeichen von γ_n ab.

Näherung hat der labile Frequenzbereich die Breite 0. Man müßte dann weiter entwickeln, bis eine entsprechend hohe Potenz von k einen von Null verschiedenen Koeffizienten erhält. Wie Strutt gezeigt hat¹⁶⁾, wird bei der Mathieschen Differentialgleichung die Entartung erst in der n -ten Ordnung aufgehoben. Andererseits bietet die Meissnersche Differentialgleichung⁹⁾ das Beispiel einer speziellen Hillschen Differentialgleichung, bei der keines der labilen Intervalle entartet ist [vgl. auch¹⁰⁾].

Unabhängig von der „Entartung“ kann es vorkommen, daß für gewisse Werte von k die zu den beiden periodischen Lösungen gehörenden Frequenzen zusammenfallen. Dies ist dann der Fall, wenn sich zwei Grenzkurven schneiden. Wieder können wir zeigen, daß diese Erscheinung auftreten kann, aber nicht muß. Wie L. E. Ince bewiesen hat⁶⁾, können sich für $k \neq 0$ zwei Grenzkurven der Mathieschen Differentialgleichung niemals schneiden. Die Meissnersche Differentialgleichung¹⁰⁾ ist wieder ein Beispiel für eine Hillsche Differentialgleichung, bei der unendlich viele dieser Schnittpunkte vorkommen. Ob solche doppelte Eigenwerte vorkommen oder nicht, hängt von der Beschaffenheit der Funktion $\Phi(u)$ ab. Wenn sie vorkommen, bewirken sie, daß für bestimmte Werte von k ein labiles Intervall (oder auch einige) ausfällt.

Berechnung der instabilen Lösungen

Aus der allgemeinen Theorie der Hillschen Differentialgleichung ist es bekannt, daß für Frequenzen, die zwischen den beiden durch Gl. (32) und (32a) angegebenen liegen, die Lösungen der Differentialgleichung (7) instabil sind. Physikalisch heißt das, daß für solche Frequenzen „Anfachung“ eintritt. Die natürliche Dämpfung des Kreises wird scheinbar vermindert, und diese Verminderung kann unter Umständen so weit gehen, daß die resultierende Dämpfung negativ wird und der Kreis wie ein Generator wirkt.

Bei der Untersuchung der labilen Lösungen werden wir den Grundgedanken der Methode verwenden, die E. T. Whittaker für die numerische Berechnung der labilen Lösungen der Mathieschen Differentialgleichung entwickelt hat.¹⁹⁾ Die sehr naheliegende direkte Verallgemeinerung dieser Methode, obwohl unseres Wissens bisher noch nicht durchgeführt, bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten und liefert die Darstellung der labilen Lösungen für kleine k . Wir werden daher auch diese Methode so abändern, daß wir asymptotische Darstellungen

für beliebige, der Bedingung (14) genügende k und große n kommen.

Der sehr glückliche Grundgedanke Whittakers ist nun, daß man einen neuen Hilfsparameter σ einführt, der gleichsam den Übergang zwischen den beiden periodischen Lösungen bewerkstelligt. Wir setzen zunächst in Gl. (16)

$$z(x) = e^{\mu x} f(x), \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Eine zweite, linear abhängige Lösung hat dann die Form (vgl. S. 591):

$$e^{-\mu x} g(x), \quad g(x + 2\pi) = g(x).$$

Als Gl. (16) erhalten wir dann

$$f''(x) + 2\mu f'(x) + [\lambda - k \cdot r(x) + \mu^2] \cdot f(x) = 0.$$

Da der Wert von λ zwischen den beiden, durch Gl. (30) und (30a) angegebenen Werten liegt, liegt er in der Nähe von $(\frac{1}{2}n)^2$, und wir können wieder

$$\lambda = (\tfrac{1}{2}n)^2 - \lambda'$$

setzen. Dann bekommen wir

$$f''(x) + (\tfrac{1}{2}n)^2 f(x) - [\lambda' + k \cdot r(x) - \mu^2] \cdot f(x) + 2\mu f'(x) = 0,$$

und aus dieser Gleichung gewinnen wir die Volterrasche Integralgleichung

$$(33) \quad \begin{cases} f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) \\ + \frac{2}{n} \int_0^x \{[\lambda' + k \cdot r(\xi) - \mu^2] f(\xi) - 2\mu f'(\xi)\} \sin \frac{1}{2}n(x - \xi) d\xi. \end{cases}$$

Das erste Glied der rechten Seite müßte eigentlich ein beliebiges lineares Aggregat aus $\cos \frac{1}{2}nx$ und $\sin \frac{1}{2}nx$ sein, das wir aber unter Weglassung eines unwesentlichen konstanten Faktors immer in der angegebenen Form schreiben können, welche den vorderhand unbestimmten Parameter σ schon in der richtigen Form enthält.

Man sieht leicht, daß man für $\mu = 0$ und $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = \pm \frac{1}{2}\pi$ gerade die Integralgleichungen erhält, denen die periodischen Lösungen genügen. Daraus kann man schon schließen, daß das instabile Gebiet durch

$$0 < |\sigma| < \tfrac{1}{2}\pi$$

beschrieben wird. Wie wir später noch sehen werden, bewirkt die Vertauschung von σ mit $-\sigma$ nur die gleichzeitige

Vertauschung von μ mit $-\mu$ und $f(x)$ mit $g(x)$, so daß wir über das Vorzeichen von σ später eine willkürliche Festsetzung treffen können. Diese von Whittaker (wenn auch auf anderem Wege) vorgenommene Einführung der Hilfskonstanten σ ist als sehr glücklich zu bezeichnen. μ ist eine sehr komplizierte Funktion von λ und k , und eine näherungsweise explizite Darstellung im labilen Gebiete konnte bisher nicht gegeben werden. Die Parameterdarstellung mittels σ ermöglicht mit einem Schlage die wirkliche Berechnung.

Die Integralgleichung (33) lösen wir durch Iteration. Aus demselben Grunde, wie bei der Integralgleichung (16a) können wir bereits nach dem ersten Schritt abbrechen.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right). \\ f_1(x) &= \cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) + \frac{2}{n} \int_0^x \{[\lambda' + k \cdot r(\xi) - \mu^2]f_0(\xi) \\ &\quad - 2\mu f_0'(\xi)\} \sin \frac{1}{2}n(x - \xi) \cdot d\xi \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) + \frac{2}{n} \int_0^x [\lambda' + \gamma_0 - \mu^2 \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} \cos(\nu\xi - \epsilon_{\nu})] \cos\left(\frac{1}{2}n\xi - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) \\ &\quad \cdot \sin \frac{1}{2}n(x - \xi) \cdot d\xi + 2\mu \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}n\xi - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) \\ &\quad \cdot \sin \frac{1}{2}n(x - \xi) \cdot d\xi. \end{aligned}$$

Nach einigen Zwischenrechnungen findet man:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) + \frac{2}{n} \left\{ \frac{1}{2}(\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \right. \\ &\quad \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) \\ &\quad \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{\nu} [\sin(\nu x - \epsilon_{\nu}) + \sin \epsilon_{\nu}] \\ &\quad + \frac{\lambda' + \gamma_0 - \mu^2}{2n} \left[\cos\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}\epsilon_n + \sigma\right) \right] + \frac{\gamma_n}{4} \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}nx - \frac{1}{2}\epsilon_n + \sigma\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{n-\nu} \left\{ \cos \left[\left(\nu - \frac{1}{2} n \right) x + \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma - \epsilon_{\nu} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \cos \left[\frac{1}{2} n x + \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma - \epsilon_{\nu} \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{n+\nu} \left\{ \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} n \right) x - \frac{1}{2} \epsilon_n - \sigma - \epsilon_{\nu} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \cos \left[\frac{1}{2} n x + \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma + \epsilon_{\nu} \right] \right\} \\
 & - \mu x \cdot \cos \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n - \sigma \right) \\
 & + \frac{2\mu}{n} \left\{ \sin \left(\frac{1}{2} n x + \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma \right) + \sin \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck eine periodische Funktion darstellen soll, müssen die mit dem Faktor x behafteten Glieder verschwinden.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \cdot (\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \sin \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n - \sigma \right) \\
 & + \frac{1}{2n} \cdot \gamma_n \sin \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n + \sigma \right) \\
 & - \mu \cos \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n - \sigma \right) = 0,
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{1}{n} (\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \sin \sigma + \frac{1}{2n} \cdot \gamma_n \sin \sigma - \mu \cos \sigma \right\} \\
 & \quad \cdot \cos \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n \right) \\
 & + \left\{ \frac{1}{n} (\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \cos \sigma + \frac{1}{2n} \cdot \gamma_n \cos \sigma - \mu \sin \sigma \right\} \\
 & \quad \cdot \sin \left(\frac{1}{2} n x - \frac{1}{2} \epsilon_n \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dann identisch für alle x gelten, wenn

$$-\frac{1}{n} (\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \sin \sigma + \frac{1}{2n} \cdot \gamma_n \sin \sigma - \mu \cos \sigma = 0$$

und

$$\frac{1}{n} (\lambda' + \gamma_0 - \mu^2) \cos \sigma + \frac{1}{2n} \cdot \gamma_n \cos \sigma - \mu \sin \sigma = 0.$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen mit $\cos \sigma$, die zweite mit $\sin \sigma$ multipliziert und addiert, bekommt man

$$(34) \quad \mu = \frac{1}{4n} \cdot \gamma_n \sin 2\sigma.$$

Da

$$\mu \ll 1,$$

kann man μ^2 vernachlässigen und bekommt

$$\lambda' = -(\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_n \cos 2\sigma)$$

oder

$$(35) \quad \lambda = (\frac{1}{2}n)^2 + (\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_n \cos 2\sigma).$$

Man verifiziert leicht, daß für $\sigma = 0$ und $\sigma = \pm \frac{1}{2}\pi$ die periodischen Lösungen mit den zugehörigen Werten von λ entstehen. Über das willkürliche Vorzeichen von σ verfügen wir so, daß μ positiv wird. Um das zu erreichen, genügt es, σ so festzusetzen, daß

$$(36) \quad 0 < |\sigma| < \frac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \gamma_n.$$

Aus Gl. (17) haben wir

$$(37) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{E} \alpha \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} n \alpha \frac{2\pi}{E} + \frac{\alpha}{n} \frac{2\pi}{E} \left(\gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_n \cos 2\sigma \right).$$

Wenn die durch die Konstanten des Schwingungskreises bestimmte Größe ω_0 in ein labiles Intervall fällt, und nur dann, ergibt Gl. (37) eine den Bedingungen (36) entsprechende reelle Wurzel σ . Aus σ kann man dann μ berechnen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (16) stellt sich im labilen Gebiet in erster Näherung folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} z(x) &= c_7 e^{\mu x} f(x) + c_8 e^{-\mu x} g(x) \\ &= c_7 e^{\mu x} \cos\left(\frac{1}{2}n x - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right) + c_8 e^{-\mu x} \cos\left(\frac{1}{2}n x - \frac{1}{2}\epsilon_n + \sigma\right). \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß $g(x)$ aus $f(x)$ dadurch entsteht, daß σ mit $-\sigma$ vertauscht wird. Indem man in die vorstehende Gleichung Formel (19) einführt, erhält man

$$\begin{aligned} z(x) &= c_7 e^{\mu \alpha t} e^{\mu \chi(\alpha t)} \cos\left[\frac{1}{2}n \alpha t + \frac{1}{2}n \chi(\alpha t) - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma\right] \\ &\quad + c_8 e^{-\mu \alpha t} e^{-\mu \chi(\alpha t)} \cos\left[\frac{1}{2}n \alpha t + \frac{1}{2}n \chi(\alpha t) - \frac{1}{2}\epsilon_n + \sigma\right] \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{-\delta t} \left[\frac{1 + k \Phi(\alpha t)}{1 + k \Phi(0)} \right]^{-1/4} \cdot z(x) \\ &= c_7 \left[\frac{1 + k \Phi(\alpha t)}{1 + k \Phi(0)} \right]^{-1/4} e^{\mu \chi(\alpha t)} e^{-(\delta - \mu \alpha) t} \\ &\quad \cdot \cos \left[\frac{1}{2}n \alpha t + \frac{1}{2}n \chi(\alpha t) - \frac{1}{2}\epsilon_n - \sigma \right] \\ &\quad + c_8 \left[\frac{1 + k \Phi(\alpha t)}{1 + k \Phi(0)} \right]^{-1/4} e^{-\mu \chi(\alpha t)} e^{-(\delta + \mu \alpha) t} \\ &\quad \cdot \cos \left[\frac{1}{2}n \alpha t + \frac{1}{2}n \chi(\alpha t) - \frac{1}{2}\epsilon_n + \sigma \right]. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren stellen eine periodische Schwankung der Amplitude mit der Tonfrequenz dar. Die eigentliche Schwingung wird durch das \cos -Glieder dargestellt. Hierbei läßt sich etwas Bemerkenswertes feststellen. Die periodische Phasenänderung χ bedeutet periodische Schwankungen der Frequenz um ihren Mittelwert $\frac{1}{2}n\alpha$, und dieser ist offenbar unabhängig von ω_0 . Daran sehen wir, daß sich die „mittlere Frequenz“ ganz automatisch und *genau* auf die entsprechende Oberschwingung des „Signals“ $\Phi(\alpha t)$ einstellt, sobald sich der Schwingungskreis im labilen Zustand befindet. Analoge Erscheinungen, die als Verallgemeinerung des „Zieheffektes“ aufgefaßt werden können, hat man auch bei den erzwungenen Schwingungen von gewissen nichtlinearen Schwingungskreisen (rückgekoppeltes Audion) feststellen können.⁶⁾

Der mit c_3 multiplizierte Teil der Lösung hat eine größere als die „natürliche“ Dämpfung δ und klingt sicher ab. In dem mit c_7 multiplizierten Teil haben wir aber jene Partikularlösung vor uns, die eine verminderte Dämpfung hat. Die Dämpfung wird sogar negativ, wenn

$$\mu\alpha > \delta.$$

Dieser Fall kann nur dann eintreten, wenn

$$(39) \quad \alpha|\gamma_n| > 2n\delta.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so verhält sich der Schwingungskreis immer dann als Generator, wenn

$$\mu\alpha = \frac{\alpha|\gamma_n|}{2n} \cdot \sin 2|\sigma| > \delta,$$

$$\sin 2|\sigma| > \frac{2n\delta}{\alpha|\gamma_n|},$$

$$\arcsin \frac{2n\delta}{\alpha|\gamma_n|} < 2|\sigma| < \pi - \arcsin \frac{2n\delta}{\alpha|\gamma_n|}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (37) muß dann ω_0 zwischen den beiden Werten

$$(40) \quad \frac{1}{2}n\alpha \frac{2\pi}{E} + \frac{\alpha}{n} \frac{2\pi}{E} \left(\gamma_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_n^2 - \frac{4n^2\delta^2}{\alpha^2}} \right)$$

liegen.

Ein Beispiel

Wir suchen die im labilen Intervall auftretenden Verhältnisse dadurch noch zu veranschaulichen, daß wir eine spezielle „Tonkurve“ $\Phi(\alpha t)$ annehmen, bei der die Rechnungen

explizite durchführbar sind.^{*)} Freilich muß ausdrücklich betont werden, daß diese Rechnungen nur als Illustration der an sich abgeschlossenen allgemeinen Betrachtungen aufgefaßt werden wollen.

Wir definieren die in Gl. (3) auftretende periodische Funktion folgendermaßen:

$$\text{für } -\pi < \alpha t < \pi: \quad \Phi(\alpha t) = \frac{\alpha t}{\pi},$$

$$\text{im übrigen} \quad \Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + 2\pi).$$

Wir sehen, daß die solchermaßen definierte Funktion alle auf S. 5 gestellten Bedingungen erfüllt. Sie ist periodisch, hat den Mittelwert 0 und die Amplitude 1.

Unsere Differentialgleichung (7) geht dann über in

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + k \frac{\alpha t}{\pi}\right) \cdot q = 0 \quad \text{für } -\pi < \alpha t < \pi.$$

Man sieht sofort [vgl. z. B.⁷⁾ S. 167], daß die Lösung dieser Differentialgleichung

$$q(t) = \sqrt{1 + k \frac{\alpha t}{\pi}} \cdot Z_{1/2} \left(\frac{2\omega_0\pi}{3k\alpha} \left[1 + k \frac{\alpha t}{\pi}\right]^{3/2} \right) - \pi < \alpha t < \pi$$

ist, wo $Z_{1/2}$ eine Zylinderfunktion von der Ordnung $\frac{1}{2}$ bedeutet. Ferner kann man [vgl. z. B.⁷⁾ S. 165] leicht

$$\frac{dq}{dt} = \omega_0 \left(1 + k \frac{\alpha t}{\pi}\right) \cdot Z_{-1/2} \left(\frac{2\omega_0\pi}{3k\alpha} \left[1 + k \frac{\alpha t}{\pi}\right]^{3/2} \right)$$

berechnen.

Nach dem Theorem von Floquet gibt es eine Lösung dieser Differentialgleichung von der Form:

$$q(t) = e^{\mu \alpha t} F(\alpha t), \quad F(\alpha t + 2\pi) = F(\alpha t).⁴⁾$$

Für diese Lösung wird dann

$$q\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - e^{2\pi\mu} q\left(-\frac{\pi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{dq}{dt}\bigg|_{\frac{\pi}{\alpha}} - e^{2\pi\mu} \frac{dq}{dt}\bigg|_{-\frac{\pi}{\alpha}} = 0.$$

^{*)} Es ist durchaus erwünscht, möglichst viele explizite lösbaren Hillsche Differentialgleichungen zu behandeln, weil dies sehr aufschlußreich hinsichtlich des Verhaltens der allgemeinen Hillschen Differentialgleichung ist. So ist die Durchrechnung dieser, unseres Wissens in der Literatur noch nicht behandelten Differentialgleichung auch vom Standpunkt der Theorie aus nicht ganz uninteressant.

Mit

$$(41) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2 \omega_0 \pi}{3 k \alpha} (1 + k)^{1/2}, \\ x_2 = \frac{2 \omega_0 \pi}{3 k \alpha} (1 - k)^{1/2} \end{cases}$$

erhält man dann

$$\begin{aligned} x_1^{1/2} \cdot Z_{1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} \cdot Z_{1/2}(x_2) &= 0, \\ x_1^{1/2} \cdot Z_{-1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} \cdot Z_{-1/2}(x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Führt man in diese beiden Gleichungen

$$Z_p = c_9 I_p + c_{10} N_p$$

ein, wobei I_p und N_p die Besselsche bzw. Neumannsche Zylinderfunktion p -ter Ordnung bedeuten, so erhält man für c_9, c_{10} ein lineares homogenes Gleichungssystem, das nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn seine Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{1/2} \cdot I_{1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} I_{1/2}(x_2), & x_1^{1/2} N_{1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} N_{1/2}(x_2), \\ x_1^{1/2} \cdot I_{-1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} I_{-1/2}(x_2), & x_1^{1/2} N_{-1/2}(x_1) - e^{2\pi\mu} x_2^{1/2} N_{-1/2}(x_2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Berücksichtigt man bei der Ausrechnung dieser Determinante, daß

$$\begin{aligned} x_1 [I_{1/2}(x_1) N_{-1/2}(x_1) - I_{-1/2}(x_1) N_{1/2}(x_1)] \\ = x_2 [I_{1/2}(x_2) N_{-1/2}(x_2) - I_{-1/2}(x_2) N_{1/2}(x_2)] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

[vgl. z. B.⁷⁾ S. 165], so bekommt man die Gleichung:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos 2\pi\mu &= \frac{\pi}{4} (x_1 x_2)^{1/2} \{ x_1^{1/2} [I_{1/2}(x_2) N_{-1/2}(x_1) - I_{-1/2}(x_1) N_{1/2}(x_2)] \\ &\quad + x_2^{1/2} [I_{1/2}(x_1) N_{-1/2}(x_2) - I_{-1/2}(x_2) N_{1/2}(x_1)] \}, \end{aligned} \right.$$

die man auch in der Form

$$(42a) \quad \left\{ \cos 2\pi\mu = \frac{\pi}{6} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \sqrt{u^2 - v^2} [I_{1/2}[(u-v)^{1/2}] \cdot N_{1/2}[(u+v)^{1/2}] - I_{1/2}[(u+v)^{1/2}] \cdot N_{1/2}[(u-v)^{1/2}]] \right\} \right.$$

mit

$$(42b) \quad u = \sqrt{\frac{4 \omega_0^2 \pi^2}{9 k^2 \alpha^2}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{4 k \omega_0^2 \pi^2}{9 \alpha^2}}$$

schreiben kann, und die der Gl. (11) der allgemeinen Theorie entspricht.

Da für große ω_0/α und für Werte von k , die hinreichend weit unter 1 liegen, x_1 und x_2 beide groß sind, kann man für die Zylinderfunktionen die z. B. in ⁷⁾ S. 98 gegebenen asymptotischen Darstellungen verwenden und erhält

$$\cos 2\pi\mu = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right) \cdot \cos(x_1 - x_2) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die periodischen Lösungen erhält man für $\Im \mu = \pm 1$ (vgl. S. 8). Dann wird:

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt[6]{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt[6]{\frac{x_2}{x_1}} \right) \cdot \cos(x_1 - x_2) \\ (43) \quad x_1 - x_2 &= n\pi \pm \arccos \frac{2}{\sqrt[6]{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt[6]{\frac{x_2}{x_1}}} \end{aligned}$$

Da für alle reelle x_1, x_2

$$\sqrt[6]{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt[6]{\frac{x_2}{x_1}} \geq 2,$$

bekommt man tatsächlich stets zwei Eigenwerte, die nur für $x_1 = x_2$ zusammenfallen. Wenn man Gl. (41) in Gl. (43) einführt, bekommt man für die zugehörigen Frequenzen die Beziehung:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{6k}{(1+k)^{3/2} - (1-k)^{3/2}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2} n\alpha \pm \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \arccos \frac{\sqrt[4]{1-k^2}(\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k})}{k} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Zwischen diesen beiden Frequenzen liegt das labile Gebiet, in dem die natürliche Dämpfung des Systems verkleinert wird. Die Dämpfung wird ganz aufgehoben, der Schwingungskreis geht in den Zustand der Selbsterregung über, wenn

$$\operatorname{Re} \mu = \delta, \quad \operatorname{Re} \mu = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pm \Im \mu &= \frac{2\pi\delta}{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\sqrt[6]{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt[6]{\frac{x_2}{x_1}} \right) \cdot \cos(x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 &= n\pi \pm \arccos \frac{2 \Im \mu \frac{2\pi\delta}{\alpha}}{\sqrt[6]{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt[6]{\frac{x_2}{x_1}}}, \\ (45) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{6k}{(1+k)^{3/2} - (1-k)^{3/2}} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2} n\alpha \pm \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \arccos \left[\frac{\sqrt[4]{1-k^2}(\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k})}{k} \Im \mu \frac{2\pi\delta}{\alpha} \right] \right\}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dieser Zustand wird nur dann eintreten, wenn

$$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{k} (\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}) \cdot \Im \mu \frac{2\pi\delta}{\alpha} < 1,$$

wenn also

$$\frac{2\pi\delta}{\alpha} < \Re \operatorname{Coj} \frac{k}{\sqrt{1-k^2}(\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k})} = \ln \sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}},$$

$$\delta < \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \ln \sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}}.$$

Unter dieser Voraussetzung verhält sich der Schwingungskreis zwischen den beiden durch Gl. (45) gegebenen Frequenzen als Generator.

Zusammenfassung

Die freien Schwingungen eines Kondensatorkreises, dessen Kapazität periodischen Schwankungen mit einer im Vergleich mit der Eigenfrequenz des Kreises kleinen Frequenz unterworfen ist, zeigen folgendes Verhalten:

Wenn wir für einen Augenblick Amplitude und Frequenz der Kapazitätsschwankungen als fest und die Eigenfrequenz des Kreises als veränderlich annehmen, so haben wir für Eigenfrequenzen außerhalb des Instabilitätsgebietes Schwingungen mit der „natürlichen“ Dämpfung

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

des Kreises vor uns, deren Frequenz veränderlich ist und in erster Näherung durch die Thomsonsche Formel

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

gegeben ist. Die „mittlere Frequenz“ des Kreises stimmt (entgegen den Berechnungen von Carson und Emersleben) *nicht* mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_0} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}}$$

überein. Die Amplitude dieser Schwingungen schwankt ebenfalls und zeichnet die Kapazitätsschwankungen nach. Diese Nachzeichnung erfolgt *verzerrt* und nur bei ganz geringen Schwankungen der Kapazität werden dieselben annähernd proportional auf die Amplitudenschwankungen übertragen.

Immer, wenn ω_0 in eines der durch Gl. (32) und (32a) bestimmten Intervalle fällt, befinden wir uns im Instabilitätsgebiete. Die „natürliche“ Dämpfung wird vermindert und zugleich tritt ein Mitnahmeeffekt ein, indem sich die mittlere Frequenz der Schwingungen *genau* auf die entsprechende Oberschwingung der Kapazitätsschwankungen einstellt. Die Amplitude der Schwingungen ist noch mehr verzerrt, als im stabilen Fall. Allerdings hat man auch hier bei kleinen Ka-

pazitätsschwankungen annähernd Proportionalität. Ist die Bedingung (39) erfüllt, so verhält sich der Schwingungskreis zwischen den beiden durch Gl. (40) bestimmten Werten von ω_0 , wie ein Wechselstromgenerator und schwingt mit einer negativen Dämpfung.

Vorliegende Arbeit ist neben einigen anderen, die sich mit ähnlichen Fragestellungen befassen, im engsten Zusammenhang mit den von Herrn Prof. Dr. Rudolf Weyrich geleiteten seminaristischen Übungen an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn entstanden, in welchen unter anderem die linearen Differentialgleichungen mit periodisch veränderlichen Koeffizienten eingehend behandelt wurden.

Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Dr. Weyrich, der mich während der Abfassung dieser Arbeit dauernd durch anregende Aussprachen gefördert hat, meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Literaturverzeichnis

- 1) J. R. Carson, Proc. Inst. Radio Engr. New York **10**. S. 57—64. 1922.
- 2) L. Dreyfus, Arch. f. El. **12**. S. 38—59. 1923.
- 3) O. Emersleben, Phys. Ztschr. **22**. S. 393—400. 1921.
- 4) G. Floquet, Ann. École norm. **12**. S. 47—88. 1883.
- 5) O. Haupt, Math. Ann. **79**. S. 278—285. 1919.
- 6) E. L. Ince, Proc. Camb. Phil. Soc. **21**. S. 117. 1922.
- 7) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig, B. G. Teubner. 1928.
- 8) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Ztschr. f. Phys. **73**. S. 223 bis 248. 1931.
- 9) É. Mathieu, J. Math. (Liouville) [2] **13**. S. 137—203. 1868.
- 10) E. Meissner, Schweizer Bauzeitung **72**. S. 95—99. 1918.
- 11) H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste **2**. II. Teil. S. 45.
- 12) B. van der Pol, Experimental Wireless, June 1926.
- 13) B. van der Pol u. M. J. O. Strutt, Phil. Mag. [7] **5**. S. 18—38. 1928.
- 14) E. Särchinger, Beitrag zur Theorie der Funktionen des elliptischen Zylinders. Dissertation Leipzig 1894. Programm Nr. 534 des Gymnasiums Chemnitz (1894).
- 15) M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Heft 3 des ersten Bandes der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“. Berlin, Springer 1932.
- 16) M. J. O. Strutt, Math. Ann. **90**. S. 625—628. 1928.
- 17) M. J. O. Strutt, Math. Ann. **101**. S. 559—569. 1929.
- 18) E. T. Whittaker, Proc. Ed. Math. Soc. **32**. S. 75—80. 1914.
- 19) W. L. Barrow, Proc. Inst. Radio Engr. New York **21**. S. 1182 bis 1202. 1933.

Brünn, Mathematisches Seminar der Deutschen Technischen Hochschule, Oktober 1933.

(Eingegangen 4. Januar 1934)

**Eine Absolutmethode
zur Messung der Dielektrizitätskonstanten
von Elektrolytlösungen bei Hochfrequenz**

Von H. Hellmann

(Mit 1 Figur)

Man kann die zur Messung der Dielektrizitätskonstanten (im folgenden abgekürzt: DK) von leitenden Flüssigkeiten benutzten Methoden einteilen nach den Ansprüchen, die sie stellen in bezug auf gegebene Daten der Flüssigkeiten. Als solche kommen in Frage die Leitfähigkeit und die DK der Vergleichslösung und die Leitfähigkeit der untersuchten Lösung. Wir wollen Methoden, die mit isolierenden Vergleichsflüssigkeiten arbeiten können, „Absolutmethoden“ (im folgenden mit I bezeichnet) und solche, die leitende Vergleichslösungen bekannter DK voraussetzen, „Relativmethoden“ (II) nennen. In beiden Gruppen läßt sich noch unterteilen. Bei I unterscheiden wir Ib und Ia, je nachdem ob die Leitfähigkeit der gemessenen Lösung bekannt sein muß oder nicht. Der Übergang von Ia zu Ib kann kontinuierlich erfolgen, je nach den Genauigkeitsansprüchen in bezug auf Kenntnis dieser Leitfähigkeit. Bei II ist zu unterscheiden, ob eine Vergleichslösung mit abhängig voneinander variierender DK und Leitfähigkeit (IIa genannt) oder eine Vergleichslösung mit bekannter und unabhängig voneinander zu variierender DK und Leitfähigkeit zur Verfügung stehen muß (IIb).

Da streng genommen leitende Vergleichslösungen mit bekannter DK noch weniger zur Verfügung stehen als genaue Absolutmessungen bei Hochfrequenz für die Leitfähigkeit der Lösungen allein, ergibt sich in der Reihenfolge Ia, Ib, IIa, IIb, eine Klassifizierung der Methoden nach ihrer Unabhängigkeit von höchstens theoretisch begründeten Voraussetzungen. Dennoch sind die technischen Schwierigkeiten und Fehlerquellen bei den bisher bekannten Methoden Ia, Ib meistens so groß, daß man zu experimentell sichereren Methoden IIa, IIb übergeht und statt unkontrollierbarer Fehlerquellen lieber die prinzipielle Unsicherheit der Relativmethode in Kauf nimmt.

Unten soll eine theoretisch sehr durchsichtige Absolutmethode der Art Ia bis Ib mitgeteilt werden, die von nicht gesicherten Voraussetzungen weitgehend frei ist.

Wir besprechen kurz die bisher benutzten Methoden. Der reinste Vertreter der Gruppe Ia ist die Fürthsche Ellipsoidmethode¹⁾. Hier liegen trotz vieler Untersuchungen [vgl. ¹⁾] bisher kaum ein paar übereinstimmende Resultate vor. Auch die letzte, besonders sorgfältig ausgeführte Untersuchung von Orthmann¹⁾ führt zu so überraschenden Ergebnissen hinsichtlich der Dispersion bei ganz niedrigen Frequenzen, daß man die Ergebnisse erst nach neuen und umfangreichen Bestätigungen als gesichert hinnehmen wird.

Die Resonanzmethode durch Kapazitätsmessung im quasistationären Schwingungskreis gehört je nach der Größe der Leitfähigkeit der gemessenen Lösung zu Ia bis Ib. Sie ist am ausführlichsten von Walden, Ulich und Werner²⁻⁵⁾ angewandt worden. Die Messungen sind von H. Zahn und dem Verf.⁶⁾ und später von Rieckhoff⁷⁾ einer ausführlichen Kritik unterzogen worden. Einige ältere [in ⁷⁾ zitiert] und die meisten neueren Untersuchungen¹⁰⁻¹⁹⁾ zeigen die Berechtigung dieser Kritik. Nach einer ähnlichen Resonanzmethode liegen auch spätere Messungen anderer Forscher vor^{8, 9)}, deren Ergebnisse im Vorzeichen des DK-Effektes denen von Walden, Ulich und Werner widersprechen, im einzelnen aber auch mit Messungen anderer Autoren und mit anderen Methoden (vgl. u.) nicht im Einklang sind. Es scheint, daß die in der zugrunde gelegten Theorie des quasistationären Schwingungskreises vorgenommene Lokalisierung von Kapazitäten und Selbstinduktionen eine zu weit gehende Idealisierung darstellt, ganz abgesehen von gröberen Fehlern durch zu starke Kopplung zwischen Sender und Meßkreis und durch direkte Einwirkung des Senders auf den Detektorkreis [vgl. dazu ^{6, 7, 11)}] und die allgemeine Kritik an den bekannten Absolutmethoden in ²²⁾. Besonders läßt sich das Auftreten einer Leitfähigkeit im Meßkondensator nicht unter allen Umständen einfach als Parallelwiderstand zum Kondensator auffassen [vgl. dazu ¹²⁾].

Eine bedeutende Verbesserung für den quasistationären Schwingungskreis stellt die Methode von Jezewski¹⁰⁻¹²⁾ dar, die eigentlich den Übergang von einer Resonanzmethode zu einer Intensitätsmethode bedeutet. Jezewski hat abgeleitet, daß der Mittelwert der beiden Kapazitäten, die links und rechts vom Resonanzmaximum gleiche Ausschläge liefern, bei Festhaltung der Intensität unabhängig von einem Parallelwiderstand zum Meßkondensator sein muß. Dieser Mittelwert fällt im

allgemeinen nicht mit der Resonanzkapazität zusammen. Für viele Fehlereinflüsse ist es ein großer Vorzug, daß bei isolierenden Eichlösungen und leitenden Meßlösungen auf gleiche Intensität im Resonanzkreis eingestellt wird. Soweit man die übliche Theorie des quasistationären Kreises als anwendbar zuläßt, wäre die Methode in die Gruppe Ia einzuordnen. Jezewski hat aber selbst gezeigt, daß die gemessene Form der Resonanzkurve mit der berechneten nicht übereinstimmt [11, S. 92]. Deshalb mußte er durch Ersatzschaltungen, deren Gleichwertigkeit mit Füllung des Kondensators durch eine leitende Flüssigkeit nicht unbedingt sicher ist, und durch Vergleich von Meßergebnissen an leitenden Lösungen mit plausiblen, aber nicht unabhängig experimentell gesicherten Erwartungen die Gültigkeit und Reichweite der theoretischen Ansätze erst nachprüfen. Insbesondere die Brauchbarkeit verschiedener Kondensatorformen zur Erzielung einwandfreier Resultate ließe sich ohne empirische Kontrolle — also Zurückgreifen auf Relativmethoden II — kaum sicher beurteilen. Für die Brauchbarkeit der Methode bei nicht zu hohen Frequenzen spricht die Übereinstimmung der erhaltenen Resultate mit der Debye-Falkenhagenschen Theorie¹³⁾ und mit den Wienschen Resultaten.¹⁴⁾

Wien¹⁴⁾ entwickelte eine konsequente Relativmethode IIa. Indem er für einen mäßig konzentrierten Elektrolyten die Debye-Falkenhagensche Theorie voraussetzte, und zur Variation der Kapazität einen möglichst selbstinduktionsfrei parallel geschalteten Kondensator mit variablem, nichtleitenden Dielektrikum benutzte, konnte er bei einfachem Ersatz der zu vergleichenden Flüssigkeiten durch unabhängige Variation der Leitfähigkeit und der Kapazität Gleichheit von Resonanzkurven erzielen, woraus Identität von Widerstand und Kapazität und damit die Leitfähigkeit und die DK der Meßlösung folgt. Wenn Wien die Daten für eine Vergleichslösung aus der Debye-Falkenhagenschen Theorie entnahm, erhielt er für Lösungen anderer Salze und ganz anderer Konzentration sehr gute, bis in Einzelheiten reichende Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen hinsichtlich Leitfähigkeit und DK. Die Erniedrigung der DK des Lösungsmittels durch den Sack-schen Richteffekt eines Ions auf die umgebenden Dipole¹⁵⁾ scheint nach den Wienschen Messungen klein zu sein gegen die aus der Debye-Falkenhagenschen Theorie folgende Erhöhung der DK der Lösung durch die eingebrachten Ionen.

Die Wiensche Methode ist von Wenk¹⁶⁾ und Dobenecker¹⁷⁾ mit Wellen bis zu 1 m herunter durchgeführt worden

und hat im ganzen eine weitere Bestätigung der Debye-Falkenhagenschen Theorie ergeben, obgleich bei den kurzen Wellen die Ersatzschaltung für eine variable Kapazität durch zwei parallel geschaltete Kapazitäten nicht mehr unbedenklich ist. Wien schlägt deshalb für ganz kurze Wellen die Herstellung einer hinsichtlich DK und Leitfähigkeit unabhängig variablen Vergleichslösung durch leitende Flüssigkeitsgemische vor¹⁸, d. h. Übergang zu einer Relativmethode IIb, bei der die Voraussetzungen über die Eichlösung noch willkürlicher sind. Trotz der sehr großen Wahrscheinlichkeit, welche die nach der Wienschen Methode gewonnenen Resultate haben, besteht doch noch das Bedürfnis nach einer brauchbaren Absolutmethode, besonders bei sehr kurzen Wellen, sei es auch nur zur Schaffung einer Bezugslösung für die Relativmethoden.

Der theoretischen Behandlung bei extrem hohen Frequenzen ist nur das Lechersystem einfach zugänglich. Hier bietet sich in der bekannten 1. Drudeschen Methode der Messung der Wellenlänge im Flüssigkeitstrog eine übersichtliche, von willkürlichen Voraussetzungen freie Absolutmethode. Mit dieser ist es neuerdings Plötze¹⁹ gelungen, bei 60 cm Wellenlänge Absolutmessungen der DK bis zu Leitfähigkeiten von $8 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ mit einer Genauigkeit von 0,6% auszuführen. In Übereinstimmung mit der Debye-Falkenhagenschen Theorie, also auch mit den Wienschen und Jezewskischen Messungen (a. a. O.) findet er bis zu den erreichten Konzentrationen keinen Effekt, der über die Meßfehler hinausgeht.

Nach einer Relativmethode IIa sind von H. Zahn und dem Verfasser^{20, 21}), sowie später von Rieckhoff⁷) Messungen im Lechersystem gemacht worden. Hier wurde eine anfängliche schwache Erniedrigung und bei stärker konzentrierten Lösungen mit Sicherheit eine beträchtliche Erhöhung der DK gemessen. Da die zur Auswertung benutzten Leitfähigkeiten nach den neueren theoretischen und experimentellen Ergebnissen [vgl. dazu ¹³] korrigiert werden müssen, errechnet sich bei verdünnten Lösungen eine schwächere Erniedrigung als seinerzeit angegeben. Das bedeutet auch in diesem Konzentrationsbereich eine Annäherung an die oben genannten neueren Ergebnisse und an die Theorie. In der Behandlung des mit Flüssigkeit gefüllten Kondensators als eines lokalisierten, komplexen Endwiderstandes liegt aber ähnlich wie bei den oben besprochenen Methoden I ein prinzipielles Bedenken. Hier soll eine neue Methode mitgeteilt werden, die einerseits von diesem Bedenken frei ist und die andererseits nur isolierende

Eichlösungen benötigt, also — je nach Größe der Leitfähigkeit der zu messenden Lösung — zu Ia—Ib zu rechnen ist.

Die Methode ist ähnlich wie die von H. Zahn und dem Verf. benutzte Methode²¹⁾ eine Intensitätsmethode. Sie besteht in Messung der Intensität der stehenden Welle im Lechersystem, wenn dieses an einem Ende in einen mit der Meßflüssigkeit gefüllten Trog eintaucht. Die Paralleldrähte laufen senkrecht durch die — „unendlich breite“ — Flüssigkeitsoberfläche in den Trog hinein. Nach unten ist die Flüssigkeit und das Paralleldrachtsystem ebenfalls unendlich ausgedehnt zu denken, was sich bekanntlich durch einen passenden Endwiderstand realisieren läßt (vgl. unten). Dann ist für die Intensität der stehenden Welle in Luft, nachdem durch geeignete Höhe der Flüssigkeitsoberfläche auf Resonanz eingestellt ist, nur der absolute Betrag des Reflexionskoeffizienten an dieser Oberfläche maßgebend. Es zeigt sich, daß dieser Koeffizient bis zu beträchtlichen Leitfähigkeiten hinauf (bei Wellenlängen $\lambda = 1$ m bis zu Leitfähigkeiten von $10^{-3} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$) praktisch unabhängig von Wellenlänge und Leitfähigkeit der Lösung, darüber hinaus bis etwa zur 5fachen Leitfähigkeit schwach und in angebbarer Weise auch von diesen beiden abhängig ist. Da die Hochfrequenzleitfähigkeit neuerdings mit ziemlicher Sicherheit bekannt ist (vgl. dazu¹³⁾), wird man also bei 1-m-Wellen mindestens bis $5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ hinauf die DK messen können. Wir werden ableiten, daß in diesem Bereich die prozentuale Intensitätsänderung etwa gleich der prozentualen Änderung der DK ist. Es werden also ziemliche Ansprüche an die Intensitätskonstanz des Senders gestellt, wenn nur kleine DK-Effekte zu erwarten sind.

Wir besprechen jetzt die theoretischen Grundlagen der Methode. Es seien die gebrauchten Bezeichnungen zusammengestellt:

$j(x)$: Stromstärke an einer Stelle x des Lechersystems,

$e(x)$: Spannung „ „ „ „ „ „ „ „

Z : Charakteristik der Doppelleitung, $Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega K}}$,

R : Widerstand, L : Selbstinduktion, G : Ableitung,

K : Kapazität pro Zentimeter Doppelleitung,

W, Q : Zwischen den Drähten eingeschaltete Widerstände (eventuell komplex).

ϵ : Dielektrizitätskonstante,

σ : Leitfähigkeit in $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $\left. \begin{array}{l} \lambda: \text{Wellenlänge in Zentimeter,} \end{array} \right\} \alpha = 60 \sigma \lambda,$

k : Ausbreitungsvektor, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{-(R+i\omega L)(G+i\omega K)},$

η : Reflexionskoeffizient, falls komplex, $\eta = |\eta| e^{i\varphi}.$

Fig. 1 gibt das Schema der Anordnung. Die Leitung 0 führt zum Sender. Der komplexe Widerstand W , der im Fall schwacher Kopplung nahezu total reflektiert, symbolisiert die Ankopplung des eigentlichen Meßsystems, bestehend aus Luftleitung 1 und Flüssigkeitsleitung 2, die im Endwiderstand Q endigt. Da das Feld auf die engste Umgebung der Paralleldrähte beschränkt ist, braucht die Flüssigkeitssäule 2 nur einen Querschnitt zu haben, der einigemal größer ist als der Abstand der Paralleldrähte.

Nach der Kabeltheorie haben Strom- und Spannungsverlauf im eingeschwungenen Zustand in jedem Abschnitt r des Systems die Form:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} j_r = A_r e^{-ik_r x} + B_r e^{ik_r x} \\ e_r = Z_r (A_r e^{-ik_r x} - B_r e^{ik_r x}) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} ik = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega K)} \\ Z = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega K}} \end{array} \right.,$$

worin A_r und B_r Konstanten zur Befriedigung der Randbedingungen an den beiden Enden des r -ten Abschnittes sind.

Aus der Randbedingung bei $x = l + d$, nämlich:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} Q \cdot j_2(l+d) = e_2(l+d) \text{ folgt:} \\ j_2 = A_2 e^{-ik_2 x} (1 + \eta_2 e^{2ik_2(x-l)}), \\ e_2 = Z_2 A_2 e^{-ik_2 x} (1 - \eta_2 e^{2ik_2(x-l)}) \text{ mit} \\ \eta_2 = e^{-2ik_2 d} \frac{Z_2 - Q}{Z_2 + Q}. \end{array} \right.$$

Aus den Randbedingungen

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} j_1(l) = j_2(l) \text{ und } e_1(l) = e_2(l) \text{ folgt weiter} \\ j_1 = A_1 e^{-ik_1 x} (1 + \eta_1 e^{2ik_1 x}), \\ e_1 = Z_1 A_1 e^{-ik_1 x} (1 - \eta_1 e^{2ik_1 x}) \text{ mit} \\ \eta_1 = e^{-2ik_1 l} \frac{\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} + \eta_2}{1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \eta_2}. \end{array} \right.$$

η_1 ist also der gesamte Reflexionskoeffizient des Systems hinter $x = l$, der im Fall $\eta_2 = 0$ in den Reflexionskoeffizienten an der Flüssigkeitsoberfläche allein übergeht.

Durch geeignete Wahl von Q kann man η_2 zu 0 machen. Außerdem sorgt schon eine geringe Leitfähigkeit durch Dämpfung der zur Oberfläche zurückkehrenden Welle, d. h. Komplexität von k_2 für Verringerung von η_2 , wenn d nicht zu klein ist. Eine für isolierendes Dielektrikum erfüllte Bedingung $Q = Z_2$ wird zwar bei leitenden Flüssigkeiten nicht mehr genau erfüllt sein, aber bei ausreichender Tiefe der Flüssigkeit sorgt gerade dann der Exponentialfaktor für genügendes Verschwinden von η_2 . Indem man der Eichlösung eine *minimale* Leitfähigkeit erteilt*) und d nicht zu klein wählt, kann man leicht erreichen, daß η_2 praktisch unabhängig auch von geringer Variation der DK verschwindend klein bleibt. Prinzipiell kann man sonst so vorgehen, daß man das Lechersystem hinter dem Flüssigkeitstrog in Luft weiterführt und das freie Ende am Ort $x = l + d + s$ durch Q überbrückt. Die Bedingung für Verschwinden des Reflexionskoeffizienten η_2 dieser gesamten Anordnung läßt sich aus der sinngemäß übertragenen Formel (3) ablesen und lautet:

$$(4) \quad \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Q - Z_1}{Q + Z_1} e^{-2ik_1 s}.$$

Jetzt kann man durch geeignetes Q , dessen Realteil und Imaginärteil aber nicht unabhängig wählbar sein müssen, und s diese Bedingung für jedes Z_2 exakt erfüllen. Man sieht sonst, daß der Widerstand $Q = Z_2$ statt am Ende von Z_2 auch im Abstand $\lambda_i/2$ am Ende der verlängerten Leitung mit beliebiger Charakteristik Z_1 des Verlängerungsstückes sitzen kann. Unten wird aber auch gezeigt werden, wie sich eine übrigbleibende innere Reflexion η_2 bei der Messung äußert und wie man ihren Einfluß eliminieren kann.

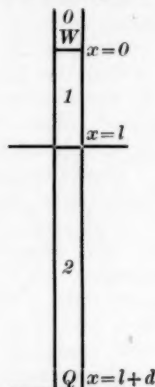


Fig. 1. Lechersystem.
0: Führt zum Sender.
W reflektiert nahezu total.
1: Luftleitung bis zum einstellbaren Flüssigkeitsspiegel $x=l$.
2: Flüssigkeitsleitung mit Endwiderstand Q

*) Man kann sich auf die Plötzschen¹⁹⁾ Absolutmessungen der DK in diesem Gebiet berufen.

Wir dürfen annehmen, daß man η_2 mit beliebiger Genauigkeit zum Verschwinden bringen kann und schreiben unter dieser Voraussetzung für η_1 :

$$(5) \quad \eta = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-2ik_1 l} = |\eta| e^{-i(2k_1 l + \varphi)}.$$

In weiteren Randbedingungen kommen außer konstanten Größen nur η , also (bei reellem k_1) l und φ nur in der Kombination $2k_1 l + \varphi$ vor. Die gemessene Intensität ist also eine Funktion $I(|\eta|, 2k_1 l + \varphi)$. Wenn wir — *ceteris paribus* — mit verschiedenen Flüssigkeiten durch l auf Resonanz einstellen*), dann besagt Gleichheit der Intensitäten Gleichheit von $|\eta|$, unabhängig von den verschiedenen Phasensprüngen φ .

Nachdem also mit isolierenden oder minimal leitenden Flüssigkeiten die Eichkurve $I_{\text{res.}}(|\eta|)$ empirisch aufgenommen ist, wird nach Einfüllung der zu messenden Flüssigkeit ihr $|\eta|$ aus der abgelesenen Intensität entnommen und ϵ aus bekanntem $|\eta|(\epsilon, \sigma, \lambda)$ (vgl. unten) ausgerechnet. Wir werden sehen, daß $|\eta|$ bei schwachen Leitfähigkeiten (bis $60\sigma\lambda = 0,1\epsilon$) von σ und λ , d. h. auch von der Sinusform der einfallenden Welle praktisch unabhängig ist. Bei wachsender Leitfähigkeit muß diese immer genauer bekannt sein, kann dann aber exakt berücksichtigt werden.

Für die ganze Methode wird nicht etwa eine spezielle Abhängigkeit der Intensität von $|\eta|$ vorausgesetzt, sondern nur die beinahe selbstverständliche Tatsache, daß gleiche Resonanzintensität gleiches $|\eta|$ bedeutet. Der allein eingehende und unten berechnete Ausdruck für $|\eta|$ setzt aber nur eine einfallende Welle — die bei kleinen Leitfähigkeiten und hohen Frequenzen nicht einmal sinusförmig zu sein braucht — und die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgenden Randbedingungen voraus. Wir werden deshalb sehen, daß η mit dem optischen Reflexionskoeffizienten an leitenden Medien bei senkrechter Inzidenz zusammenfällt. Das Lechersystem sorgt bei uns nur für das Zusammenhalten des elektromagnetischen Feldes. Von speziellen unkontrollierbaren Annahmen ist die zur Auswertung der Messungen benötigte Theorie unabhängig.

Bevor wir $|\eta|$ diskutieren, wollen wir für orientierende Zwecke noch einen Näherungsausdruck für die in 1 gemessene

*) Die Unterschiede von $l_{\text{res.}}$ bei leitenden und nichtleitenden Lösungen können übrigens, wie man aus (5) und (12) ausrechnet, bei Wasser maximal nur etwa 0,65% der Wellenlänge erreichen. Bei völlig isolierenden und bei extrem gut leitenden Füllungen 2 ist ja auch $l_{\text{res.}}$ dasselbe.

Intensität aufstellen. Dazu ziehen wir noch die Randbedingungen bei $x = 0$ heran. Hier fließt durch W der Strom $e_1^{(0)}$. Die Randbedingungen lauten daher

$$A_0 + B_0 - A_1 \frac{Z_1}{W} (1 - \eta_1) = A_1 (1 + \eta_1),$$

$$A_1 Z_1 (1 - \eta_1) = (A_0 - B_0) Z_0$$

und daraus ergibt sich:

$$(6) \quad A_1 = \frac{2 \frac{W}{Z_1} \cdot A_0}{W \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_0} \right) + 1 - \eta_1 \left(1 + W \left(\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) \right)}.$$

Wir setzen extrem schwache Kopplung mit dem Sender, d. h. $W \ll Z$ voraus. Bei schwacher Kopplung ist auch A_0 als unabhängig von dem Zustand des Meßsystems anzusehen. Unter Fortlassung eines konstanten Faktors wird dann:

$$(7) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1 - \eta_1} & \text{und} & j_1 = e^{-i k_1 x} \frac{1 + \eta_1 e^{2i k_1 x}}{1 - \eta_1}, \\ e_1 = Z_1 e^{-i k_1 x} \frac{1 - \eta_1 e^{2i k_1 x}}{1 - \eta_1}. \end{cases}$$

Wir bekommen mit einem z. B. auf $|j_1|^2$ ansprechenden Meßinstrument maximale Intensität bei festem $|\eta_1|$, wenn wir l so wählen, daß $\eta_1 = |\eta_1|$ ist, und den Ort des Meßinstrumentes so, daß $e^{-2i k_1 x} = +1$ wird. So können wir schreiben:

$$(8) \quad |j_1(l = l_{\text{res.}})|^2 = \left(\frac{1 + |\eta_1|}{1 - |\eta_1|} \right)^2.$$

Mit dem Stromzeiger am gleichen Ort wird allgemein:

$$(9) \quad |j_1(l)|^2 = \left| \frac{1 + \eta_1}{1 - \eta_1} \right|^2.$$

Unter Verwendung von η_1 aus (3) mit $\eta_2 \neq 0$ erlaubt Formel (9) das Aussehen der Resonanzkurve bei beliebiger innerer Reflexion näherungsweise anzugeben. Die Variation der Höhe der Flüssigkeitsfüllung bedeutet dann gleichzeitige Variation von l und d unter Konstanthaltung von $l + d$. Die innere Reflexion äußert sich in einer Feinstruktur der Resonanzkurve $|j_1(l)|^2$ von der Periode der Wasserwellenlänge. Hat man sich von dem Verschwinden dieser Feinstruktur bei einer Resonanzeinstellung l mit geringer Flüssigkeitshöhe überzeugt, dann wird diese in Resonanzlagen l bei vollständiger Füllung wegen der Dämpfung im Innern erst recht keine Rolle mehr spielen.

Gl. (8) mit $|\eta_1|$ aus Gl. (3) lehrt aber auch, wie die Resonanzintensität durch ein übrigbleibendes η_2 beeinflußt

wird und wie man diesen Resteinfluß eliminieren kann. Dazu müssen wir allerdings l und d unabhängig variieren können, d. h. außer der Höhe des Flüssigkeitsspiegels auch die Länge des Lechersystems in der Flüssigkeit bis zum Endwiderstand Q veränderlich machen.

Da für die innere Reflexion nur der Fall fast isolierender Flüssigkeiten interessiert, wollen wir mit der Abkürzung $q e^{i\beta}$ für η_2 und p für $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ (p und q sind positiv reell) nach (3) und (2) schreiben:

$$(10) \quad |\eta_1|^2 = \left| \frac{p + q e^{i\beta}}{1 + p q e^{i\beta}} \right|^2 = \frac{p^2 + q^2 + 2 p q \cos \beta}{1 + p^2 q^2 + 2 p q \cos \beta}.$$

Die in (8) gegebene Maximalintensität hängt also bei $\eta_2 \neq 0$ noch von β , d. h. von d ab. Da $|\eta_1| < 1$ ist, nimmt $|j_1(d)|^2$ in (8) ein absolutes Maximum an, wenn $|\eta_1|$ seinen größten Wert hat. Dies ist der Fall für $\cos \beta = +1$, also

$$|\eta_1| = \frac{p + q}{1 + p q}.$$

Dabei ist $l_{\text{res.}}$ durch $e^{-2ik_1 l} = 1$ bestimmt. Somit wird:

$$(11a) \quad |j_1(l = l_{\text{res.}}, d = d_{\text{res.}})|^2 = \left(\frac{1 + p}{1 - p} \right)^2 \left(\frac{1 + q}{1 - q} \right)^2.$$

Wenn jetzt bei festgehaltenem „ $l_{\text{res.}}$ “, d auf völlige Dissonanz eingestellt wird, dann hat $|j_1|^2$ seinen kleinsten bei $e^{-2ik_1 l} = 1$ möglichen Wert. Dieser tritt ein für $\cos \beta = -1$ und beträgt:

$$(11b) \quad |j_1(l = l_{\text{res.}}, d = d_{\text{diss.}})|^2 = \left(\frac{1 + p}{1 - p} \right)^2 \left(\frac{1 - q}{1 + q} \right)^2.$$

Man sieht, daß das geometrische Mittel von (11a) und (11b) gerade gleich der Intensität ohne innere Reflexion im Resonanzfalle ist. Außerdem ist diese nach (3) und (9) — immer bei festem $l_{\text{res.}}$ — gleich der Intensität für $\cos \beta = 0$, d. h. für $d = \frac{d_{\text{res.}} + d_{\text{diss.}}}{2}$. Es gilt also:

$$(11c) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{|j_1(l = l_{\text{res.}}, d = d_{\text{res.}})|^2 \cdot |j_1(l = l_{\text{res.}}, d = d_{\text{diss.}})|^2} \\ &= \left| j_1 \left(l = l_{\text{res.}}, d = \frac{d_{\text{res.}} + d_{\text{diss.}}}{2} \right) \right|^2 \\ &= |j_1(l = l_{\text{res.}}, \text{ bei } q = 0)|^2. \end{aligned} \right.$$

Wenn auch die Beziehung (11), wie überhaupt die expliziten Intensitätsausdrücke, unter einer Reihe von Vernachlässigungen abgeleitet ist, so ist das aus ihr folgende Ver-

fahren, durch zwei Einstellungen und Mittelwertbildung einen geringfügigen Resteinfluß der inneren Reflexion zu eliminieren, als völlig ausreichend anzusehen. Sofern man die experimentelle Forderung der unabhängigen Variierbarkeit von d in Kauf nimmt, wird man also auch auf geringen Leitfähigkeitszusatz bei den Eichlösungen verzichten können und deshalb nicht einmal mehr auf Voraussetzung der Plötzeschen¹⁹⁾ Resultate für extrem schwach leitende Lösungen angewiesen sein.

Man braucht zur Auswertung der Meßergebnisse $|\eta|(\sigma, \lambda, \epsilon)$. Nach (5) ist:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{2ik_1 \cdot l} \eta &= \frac{\sqrt{\frac{R+iwL}{iwK}} - \sqrt{\frac{R+iwL}{G+iw\epsilon K}}}{\sqrt{\frac{R+iwL}{iwK}} + \sqrt{\frac{R+iwL}{G+iw\epsilon K}}} = \frac{\sqrt{\frac{G}{iwK}} + \epsilon - 1}{\sqrt{\frac{G}{iwK}} + \epsilon + 1} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon - i\alpha} - 1}{\sqrt{\epsilon - i\alpha} + 1}, \end{aligned} \right.$$

worin α für $60\sigma\lambda$ steht. Der Ausdruck ist mit dem optischen Reflexionskoeffizienten identisch.*) Weiter wird

$$(13) \quad |\eta|^2 = \frac{1 + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2} - \sqrt{2(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2})}}{1 + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2} + \sqrt{2(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2})}}.$$

Man sieht, daß $|\eta|$ von σ und λ unabhängig ist, solange $\alpha^2 \ll \epsilon^2$ ist.

Als Maß für die Resonanzintensität bei fehlender innerer Reflexion bilden wir nach (8) den Ausdruck

$$(14) \quad J_0 = \left(\frac{1 + |\eta|}{1 - |\eta|} \right)^2 = \frac{1 + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2} + \sqrt{(\epsilon - 1)^2 + \alpha^2}}{1 + \sqrt{\epsilon^2 + \alpha^2} - \sqrt{(\epsilon - 1)^2 + \alpha^2}}.$$

Für $\frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \ll 1$ gilt $J_0 = \epsilon \left(1 + \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \frac{3\epsilon - 1}{4(\epsilon - 1)} \right)$, und wenn auch noch $\epsilon \gg 1$ ist, $J_0 = \epsilon \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \right)$. Die prozentuale Intensitätsänderung ist also dem prozentualen DK-Effekt annähernd gleich.

Die Grenze der Meßgenauigkeit ist somit in erster Linie durch die Konstanz der Senderintensität gegeben. Rückwirkungen des Meßsystems auf die Intensität des Senders veranlassen wohl, daß die Intensität in 1 anders als J_0 von $|\eta|$ abhängt, beeinflussen aber die eigentliche Messung nicht, da ja mit Hilfe bekannter, isolierender Flüssigkeiten die Eichkurve $I(|\eta|)$, oder was eine bequemere Abhängigkeit ergeben wird,

*) Vgl. z. B. M. Born, Optik, S. 30 u. S. 259–260. Springer 1933.

$I(J_0)$ aufgenommen wird. Von spontanen Intensitätsschwankungen kann man sich durch irgend eine Kompensationsschaltung freimachen, die besorgt, daß die gemessene Intensität von 1 stets auf die jeweilige Senderintensität bezogen wird.

Um die prinzipiellen Grenzen der Methode überblicken zu können, sind in Tab. 1 als Funktion von α/ε bei einer DK von 81 aufgetragen:

I. Die Gesamtintensität. Identisch mit zugehöriger DK eines Isolators. Gl. (14).

II. Die prozentuale Intensitätsänderung bei einer DK-Änderung von 1%. Logarithmische Differentiation von Gl. (14).

III. Die prozentuale Intensitätsänderung bei einer Änderung der Leitfähigkeit oder Wellenlänge von 1%. Logarithmische Differentiation von Gl. (14).

Tabelle 1

α/ε	I. J_0	II. $\frac{\partial \ln J_0}{\partial \ln \varepsilon}$	III. $\frac{\partial \ln J_0}{\partial \ln \alpha}$
0,0	81,0	1,00	0,00
0,1	81,6	0,99	0,01
0,2	83,4	0,94	0,06
0,4	90,5	0,79	0,21
0,6	102	0,61	0,39
0,8	116	0,43	0,57
1,0	134	0,29	0,71
1,3	165	0,13	0,87
1,72	214	0,00	1,00
2,2	278	-0,07	1,07

Man sieht, daß bei $\frac{\alpha}{\varepsilon} = 0,4$ die Leitfähigkeit schon auf etwa 1% bekannt sein muß, wenn man einen 1%igen DK-Effekt noch auf etwa $\frac{1}{4}$ seines Wertes genau messen will.

Weiter als bis zu $J_0 = 90$ hinauf steht auch die empirische Eichkurve $I(J_0)$ kaum zur Verfügung, so lange man sich auf isolierende Eichflüssigkeiten beschränkt und wenn man nicht mit Hilfe der Theorie sehr weit extrapolieren will. Dieser Punkt läßt sich aber durch Wasser niedriger Temperatur und mit geringer Extrapolation noch erreichen; zu kleinen J_0 hin kann mit geeigneten Mischungen die Eichkurve beliebig fortgesetzt werden. Wenn die Eichkurve einmal aufgenommen ist, genügt es bei den Messungen selbst, die man eher bei etwas erhöhten Temperaturen vornehmen wird, einen beliebigen Punkt J_0 der Eichkurve $I(J_0)$ herauszugreifen und die zugehörige richtige Resonanzintensität mit dem Sender herzustellen,

Abgesehen von der fehlenden Eichflüssigkeit tritt aber auch von $\frac{\alpha}{s} = 0,8$ an der Einfluß der DK gegen den der Leitfähigkeit zurück. Zu $\frac{\alpha}{s} = 0,4$ gehört $\sigma = \frac{0,4 s}{60 \lambda}$, das bedeutet bei einer Wellenlänge von 1 m und einer DK 81 ein $\sigma = 5,4 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Nach dieser Methode lassen sich also sicher die von Wenk¹⁶⁾ nach der Wienschen Relativmethode erreichten Leitfähigkeiten ebenfalls erreichen. Die von Plötze¹⁹⁾ nach der Drudeschen Absolutmethode erzielten Resultate können durch unsere Absolutmethode etwa eine Zehnerpotenz der Leitfähigkeit weitergeführt werden. Zu noch höheren Konzentrationen wird die Methode durch die Relativmethode IIa von H. Zahn und dem Verf.²¹⁾ fortgesetzt, die nach dem Vorliegen von Absolutresultaten bei verdünnten Lösungen und von Leitfähigkeitsmessungen sehr an Sicherheit gewinnt. Das ganze Verfahren ist natürlich besonders für extrem kurze Wellen geeignet; im selben Verhältnis, wie die Wellenlänge kürzer wird, wird die Grenzleitfähigkeit höher. Nach kurzen Wellen hin setzt nur die Herstellbarkeit derselben mit genügender Konstanz eine technische Grenze.

Wie Tab. 1 zeigt, ist die Intensität von $\frac{\alpha}{s} = 1,3$ ab fast unabhängig von der DK. In diesem Gebiet kann die Methode zur Messung von Leitfähigkeiten ohne genaue Kenntnis der DK benutzt werden. Man braucht für wäßrige Lösungen allerdings Eichlösungen bekannter Leitfähigkeit wie bei den bisher üblichen Relativmethoden.

Will man bei höheren Elektrolytkonzentrationen die Leitfähigkeit in Lösungsmitteln kleinerer DK untersuchen, dann steht aber als bekannte Eichflüssigkeit nichtleitendes Wasser zur Verfügung. Ist die DK des untersuchten Lösungsmittels ϵ' klein gegen $\alpha' = 60 \sigma' \lambda$ für diese Lösung und gegen ϵ der isolierenden Eichflüssigkeit, dann läßt sich die Leitfähigkeit σ' , wie aus (14) abzulesen ist, von etwa $60 \sigma' \lambda = \epsilon'$ bis $60 \sigma' \lambda = \frac{1}{2} \epsilon + \epsilon'$ ohne genaue Kenntnis der DK ϵ' und ohne theoretische Extrapolation der Eichkurve absolut messen.

Die erörterte Methode liegt einer hier in Gang befindlichen experimentellen Arbeit von Herrn M. Röver zugrunde. Mit Einwilligung von Herrn Röver kann ich aus seiner Arbeit vorläufig mitteilen, daß die Methode sich als durchführbar erwiesen hat und daß die theoretischen Überlegungen auch im einzelnen bestätigt gefunden wurden. Da bisher in erster Linie auf sorgfältige Nachprüfung der Grundlagen und Untersuchung

der Fehlerquellen Gewicht gelegt wurde*), kann über die Resultate nur gesagt werden, daß sie jedenfalls gegen die von verschiedener Seite gemessenen großen DK-Effekte (vgl. o.) sprechen, dagegen größenordnungsmäßig mit den Plötzschen¹⁹⁾, Jezewskischen¹²⁾ und Wien-Wenkschen¹⁶⁾ Ergebnissen im Einklang sind. Die bisher benutzte Wellenlänge beträgt 110 cm.

Die ausführliche Arbeit von Herrn Röver soll in dieser Zeitschrift erscheinen. Aus äußeren Gründen, welche meine Zusammenarbeit mit Herrn Röver unterbrechen, erschien es zweckmäßig, die Theorie der Methode schon vor Abschluß der Röverschen Arbeit hier mitzuteilen.

Literaturverzeichnis

- 1) W. Orthmann, *Ann. d. Phys.* [5] **9**. S. 537. 1931. Hier auch weitere Literatur über die Fürth'sche Methode.
- 2) P. Walden, H. Ulich u. O. Werner, *Ztschr. f. phys. Chem.* **115**. S. 178. 1925.
- 3) P. Walden, H. Ulich u. O. Werner, *Ztschr. f. phys. Chem.* **116**. S. 261. 1925.
- 4) P. Walden, H. Ulich u. O. Werner, *Ztschr. f. phys. Chem.* **129**. S. 417. 1927.
- 5) P. Walden u. O. Werner, *Ztschr. f. phys. Chem.* **129**. S. 389. 1927.
- 6) H. Hellmann u. H. Zahn, *Ann. d. Phys.* [4] **86**. S. 687. 1928.
- 7) H. Rieckhoff, *Ann. d. Phys.* [5] **2**. S. 577. 1929.
- 8) R. T. Lattey u. W. G. Davies, *Phil. Mag.* [7] **12**. S. 1111. 1931.
- 9) R. T. Lattey u. W. G. Davies, *Phil. Mag.* [7] **13**. S. 444. 1932.
- 10) M. Jezewski, *Journ. d. Phys. et le Radium* [6] **3**. S. 293. 1922 und *Ztschr. f. Phys.* **43**. S. 448. 1927.
- 11) M. Jezewski, *Phys. Ztschr.* **34**. S. 88. 1933.
- 12) M. Jezewski u. J. Kamecki, *Phys. Ztschr.* **34**. S. 561. 1933.
- 13) H. Falkenhagen, *Elektrolyte*. Hirzel, Leipzig 1932.
- 14) M. Wien, *Ann. d. Phys.* [5] **11**. S. 429. 1931.
- 15) P. Debye, *Polare Molekeln* S. 128, Hirzel, Leipzig 1929.
- 16) P. Wenk, *Ann. d. Phys.* [5] **17**. S. 679. 1933.
- 17) O. Dobenecker, *Ann. d. Phys.* [5] **17**. S. 699. 1933.
- 18) M. Wien, *Phys. Ztschr.* **34**. S. 625. 1933.
- 19) M. Plötze, *Ann. d. Phys.* [5] **18**. S. 288. 1933.
- 20) H. Hellmann u. H. Zahn, *Ann. d. Phys.* [4] **80**. S. 191. 1926.
- 21) H. Hellmann u. H. Zahn, *Ann. d. Phys.* [4] **81**. S. 711. 1926.
- 22) H. G. Malone, A. L. Ferguson u. L. O. Case, *Journ. Chem. Phys.* **1**. S. 836 u. 842. 1933.

*) Die Erfahrungen bei den Messungen gaben den Anstoß zu einem Teil der hier mitgeteilten Einzelüberlegungen.

Hannover, Physikal. Inst. der Tierärztlichen Hochschule.

(Eingegangen 24. Januar 1934)

**Über die Zusammenhänge
bei der thermischen und mechanischen Lösung
der atomaren Bindungen in Metallen**

Von F. Regler

(Mit 10 Figuren)

In vorliegender Abhandlung soll gezeigt werden, daß jede Energieerhöhung in kristallinen Metallen im Röntgendiagramm eine Erhöhung der radialen Interferenzlinienbreite hervorruft, gleichgültig, ob diese Energiezufuhr durch Temperaturerhöhung oder durch ruhende bzw. schwingende mechanische Kräfte erfolgt. Die Bruchstelle ein- und desselben Metalles weist den gleichen Wert für die Interferenzlinienbreite auf, wobei letztere von der Art der Entstehung des Bruches unabhängig ist. Tritt die Lösung der atomaren Bindungen durch Schmelzen ein, so zeigen die Untersuchungen an Silberproben, daß die knapp vor dem Schmelzpunkt erhaltene Linienbreite mit der bei der Bruchstelle von Silber gewonnenen Linienbreite übereinstimmt.

1. Experimentelle Angaben

Die in nachstehender Abhandlung zur Besprechung gelangenden röntgenographischen Feinstrukturuntersuchungen wurden an vielkristallinen Eisen- und Silberproben durchgeführt. Für die Untersuchungen an Eisen wurde Fe-K-Strahlung, für die an Silber die Cu-K-Strahlung verwendet. Als Röntgenröhre diente eine offene Glühkathodenröntgenröhre Seemannscher Bauart, die bei Anregung der Fe-K-Strahlung mit etwa 30 kV_{max}, bei Anregung der Cu-K-Strahlung mit rund 45 kV_{max}, jedesmal mit 40 mA Röhrenstromstärke in Halbwellenschaltung ohne jede Filterung der Röntgenstrahlung betrieben wurde. Als Aufnahmeverfahren gelangte das *Kegelreflexionsverfahren* des Verfassers¹⁾ zur Anwendung. Die Blende ist in das Innere des Kegels verlegt, so daß der Mittelpunkt des Blendenanfangs mit dem Scheitelpunkt der Kegelkamera zusammenfällt. Der Film bildet in dieser Kamera einen gleichseitigen Kegel von 81 mm Seitenlänge. Die Blendenlänge be-

1) F. Regler, Ztschr. f. Phys. 74. S. 547—564. 1932; Ergebnisse der technischen Röntgenkunde III. S. 184. 1933; Bericht a. d. II. Internat. Schientagung, Zürich, 16.—19. Juni 1932, S. 192.

trägt 57 mm, der in der ganzen Blendenlänge konstante Blendendurchmesser 2,1 mm. Die Kegelscheitel-Präparatdistanz betrug bei allen Untersuchungen 83 mm. Der Fokus der Röntgenröhre wurde durchweg sehr groß gewählt, wodurch die Begrenzung des primären Röntgenstrahlenbündels nur durch die Abmessungen der Blende geliefert wird und von der Größe und der Form des Fokus unabhängig ist. Die Expositionszeit betrug bei allen Aufnahmen 2 Min. Film und Präparat waren relativ zueinander in Ruhe.

Die mechanische Beanspruchung der Proben wurde in den entsprechenden Festigkeitsmaschinen vorgenommen.

Für die Untersuchung der kristallographischen Veränderungen durch Temperaturerhöhung wurden nur Silberproben verwendet, da Eisenproben unter dem Einfluß des Sauerstoffes der Luft bei höheren Temperaturen zu stark oxydieren. Andererseits erwies sich die Anschaffung eines Vakuumglühofens, bei dem ein Filmwechsel ohne Abkühlung der Probe und ohne Luftzufuhr möglich gewesen wäre, als zu kostspielig. Durch die Ausführung der Untersuchungen an Edelmetallen wurde der schädliche Einfluß des Sauerstoffes der Luft hintangehalten. Da Platin einen für die Durchführung der Untersuchungen unangenehm hohen Schmelzpunkt aufweist, kamen zur Untersuchung nur Gold- oder Silberproben in Betracht, von denen wegen der geringeren Kosten den Silberproben der Vorzug gegeben wurde.

Die Untersuchung der Silberproben wurde nach der in Fig. 1 wiedergegebenen Anordnung durchgeführt. Als Wärmequelle diente ein elektrischer Widerstandofen von 120 mm Länge und 13 mm Innendurchmesser. Die Achse des zylindrischen Ofens fiel mit dem primären Röntgenstrahlenbündel zusammen. Um die Silberproben an der der Kegelkamera zugewandten Seite bis zum Schmelzpunkt erhitzen zu können, durfte kein zylindrischer Silberstab in den Ofen eingeführt werden, da dieser im Innern des Ofens bereits geschmolzen wäre, ohne an der Oberfläche die nötigen Temperaturwerte aufzuweisen. Vielmehr war es notwendig, die Silberproben als dünne Plättchen einem zylindrischen Metallstab mit höherem Schmelzpunkt aufzusetzen und diesen in den elektrischen Ofen einzuführen. Für diesen Zweck erwies sich ein Nickelstab als besonders geeignet, der auch bei hohen Temperaturen relativ geringe Oxydbildung erkennen ließ. Um den Einfluß eines eventuellen Lösungsvorgangs des Nickels in der Silberprobe auf das Untersuchungsergebnis möglichst auszuschalten, wurden zwischen die zu untersuchende Probe und den Nickelstab Silberplättchen

gepreßt, die einerseits die Möglichkeit einer Beeinflussung der Silberoberfläche durch den Nickelstab verringerten, andererseits einen konstanten und innigen Wärmekontakt zwischen der Silberprobe und dem Nickelstab vermittelten. Die Befestigung des Silberbleches auf dem Nickelstab ist aus der Fig. 1 zu entnehmen. Dem Nickelstab wurden zwei zueinander geneigte plane Flächen aufgeschliffen, an welchen das über die Grundfläche des Nickelstabes gestülpte Silberblech starr befestigt

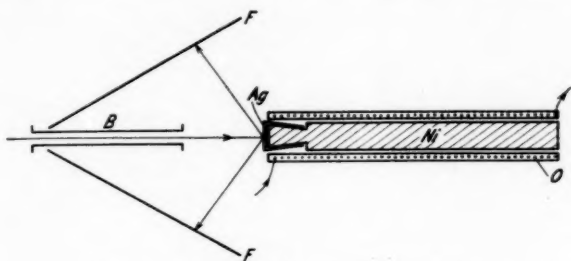


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung zur Aufnahme von Kegelreflexionsdiagrammen bei hohen Temperaturen. *B* Blende, *F* Film, *O* Widerstandsofen, *Ni* Ni-Stab, *Ag* Ag-Plättchen

wurde. Zwischen diese Silberprobe und den Nickelstab wurden dann die oben erwähnten Silberplättchen gepreßt. Die durch diesen Vorgang in der Silberprobe erzeugten Spannungen und bleibenden Verformungen beeinflussen zwar die Versuchsergebnisse etwas, waren aber nicht von solcher Größe, daß die Untersuchungsergebnisse dadurch eine wesentliche Beeinträchtigung erfahren hätten.

Die Temperatur der untersuchten Silberproben wurde thermoelektrisch gemessen. Da sich bei der Durchführung der Röntgenuntersuchungen speziell im Gebiet hoher Temperaturen das Thermoelement aus rein praktischen Gründen öfters als hinderlich erwies, wurde bei gleichen Versuchsbedingungen und nach Einstellung eines stationären Zustandes die Temperaturmessung auch in der Form ausgeführt, daß nach entsprechender Eichung mittels des Thermoelementes aus der Stromaufnahme auf die Oberflächentemperatur der Silberproben geschlossen wurde. Mehrere mit verschiedenen Silberproben durchgeführte Versuchsreihen bewiesen die Konstanz des Zusammenhanges zwischen der Oberflächentemperatur und der Ofenstromstärke, so daß dieses Meß-

verfahren als genügend exakt Verwendung finden konnte. Der Zusammenhang zwischen der Oberflächentemperatur und der Stromstärke im Ofen ist in Fig. 2 wiedergegeben.

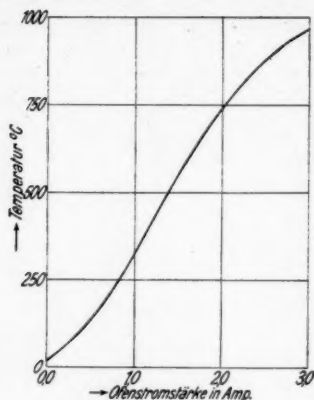


Fig. 2. Abhängigkeit der Oberflächentemperatur der untersuchten Silberproben von der Stromstärke im elektrischen Widerstandsofen

Zum Abschluß der experimentellen Angaben sei noch erwähnt, daß alle Versuchsobjekte, die eine mechanische Bearbeitung wie Abdrehen, Abhobeln und dgl. erfahren haben, also vornehmlich die Eisenproben, vor der Vornahme der röntgenographischen Feinstrukturuntersuchung mit einer Mischung aus HNO_3 + HCl abgeätzt wurden, um die durch den Bearbeitungsvorgang entstandene Kaltverformungszone zu entfernen und so das Kristallgitter des Probematerials ohne Einwirkung dieser Nebenerscheinungen erfassen zu können.

2. Auswertungsverfahren

Die Auswertung der erhaltenen Röntgendiagramme erfolgte durch Ausmessung der radialen *Interferenzlinienbreite*.¹⁾ Zu berücksichtigen ist dabei, inwieweit bei dem verwendeten großen Blendendurchmesser die Divergenz des primären Röntgenstrahlenbündels die Ergebnisse beeinflussen kann. Nach den Ableitungen von F. Lihl²⁾ ist nun bei einer Kegelscheitel-Präparatdistanz von 83 mm unter den oben angegebenen Aufnahmebedingungen für alle Beugungswinkel $\vartheta \geq 61^\circ$ der Einfluß der Divergenz der primären Röntgenstrahlung insoweit eingeschränkt, als für die beiderseitige Begrenzung der Interferenzlinie nur die durch die Blende begrenzte parallele Röntgenstrahlung in Betracht kommt, während für diesen

1) F. Regler, *Ztschr. f. Phys.* 71. S. 386. 1931; *Mitt. d. Techn. Versuchsamt.*, J. Springer, Wien, XXI, S. 32 u. f., 1932; *Bericht a. d. II. Intern. Schienentagung*, Zürich, 16.—19. Juni 1932, S. 192 u. f.; *Ergebnisse d. techn. Röntgenkunde*, III, S. 184 u. f. 1933; *Ztschr. f. Phys.* 82. S. 337 u. f. 1933.

2) F. Lihl, *Ann. d. Phys.* [5] 19. S. 312 u. f. 1934.

Winkelbereich die divergente und konvergente Strahlung im Innern dieser Interferenzlinie zur Abbildung gelangen muß. Es fallen also sowohl die (022)-Linie des Eisens, aufgenommen mit FeK_α -Strahlung, als auch die (224)-Linie des Silbers, aufgenommen mit CuK_α -Strahlung, in diesen von der Divergenz unbeeinflussten Bereich, da der Glanzwinkel für die (022)-Linie von Fe $\vartheta = 72^\circ 57'$, während dieser Winkel für die (224)-Linie von Ag $\vartheta = 67^\circ 35'$ bei Zimmertemperatur, bzw. $\vartheta = 65^\circ 19'$ beim Silberschmelzpunkt beträgt. Alle drei Glanzwinkel sind also größer als 61° , so daß die Vermessung der radialen Interferenzlinienbreite als von der Divergenz der primären Röntgenstrahlung unbeeinflusst erfolgen kann.

Wie vom Verf. schon an anderen Stellen mehrfach berichtet wurde, ist die Begrenzung der Interferenzlinien unter den beschriebenen Aufnahmebedingungen auch noch in Diagrammen von der Bruchstelle eines Metalles scharf und daher eindeutig vermeßbar. Die Interferenzlinien werden bei Kaltverformung eines Metalls in radialer Richtung wohl viel breiter, aber nicht, wie in den meisten Veröffentlichungen anderer Autoren immer bemerkt wird, verwaschen, sondern bleiben scharf begrenzt.¹⁾ Der Schwärzungssprung an den beiden Linienenden ist allerdings gering, aber von einem geübten Auge im Mikrometer unter geeigneten Beleuchtungsverhältnissen und bei richtiger Wahl der Vergrößerung sicher erfaßbar. Die Vermessung der Interferenzlinien gelingt auch dann noch, wenn diese in Interferenzpunkte aufgelöst erscheinen (bei Röntgenaufnahmen mit ruhendem Film), da die Interferenzpunkte immer einer schwachen, aber scharf begrenzten Interferenzlinie überlagert sind. Diese schwache Interferenzlinie rührt von den stets vorhandenen zahlreichen kleinen Kristallen her.

Über die Höhe des Schwärzungssprunges an den Enden der Interferenzlinien von einem kalt gewalzten Silberblech gibt die Photometerkurve in Fig. 4 einen Überblick. Fig. 3 zeigt das Kegelreflexionsdiagramm dieses Ag-Blechtes, das bereits deutliche Walztextur erkennen läßt und keine Spur einer Arkelaufspaltung aufweist. Das Diagramm dieses kaltgewalzten Silberbleches würde nach den herkömmlichen Vorstellungen als typisch für ein Diagramm mit verwaschenen Interferenzlinien gelten. Die im Diagramm abgebildeten Interferenzlinien

1) Allerdings können ungeeignete Aufnahmebedingungen, z. B. ein ungeigneter Fokus leicht eine Unschärfe vortäuschen.

stammen von innen nach außen, also von den großen gegen die kleinen Glanzwinkel hin, von den Netzebenen:

$(115)\alpha$, $(044)\beta$, $(224)\alpha$, $(115)\beta$, $(024)\alpha$, $(224)\beta$ und $(313)\alpha$.
 $(333)\alpha$, $(333)\beta$



Fig. 3. Kegelreflexionsdiagramm eines kalt gewalzten Silberbleches (aufgenommen mit Cu-K-Strahlung), verkleinert

Die Photometerkurve wurde mittels eines Mikrophotometers der Firma C. Zeiss aufgenommen; sie steht zum Original-

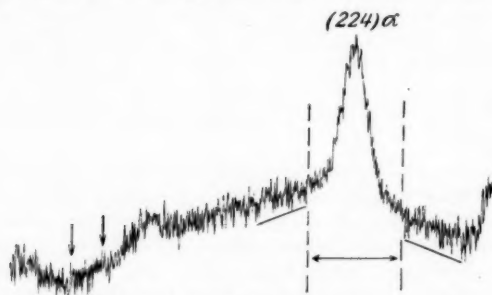


Fig. 4. Photometerkurve eines Teiles des Kegelreflexionsdiagrammes der Fig. 3

reflexionsdiagramm im Verhältnis 3:1. Das Photometerdiagramm beginnt von links mit dem Schwärzungsmaximum der $(115)\alpha$ und endet rechts mit dem Schwärzungsmaximum der $(333)\alpha$

(115) β -Linie. Dazwischen liegen die Schwärzungsmaxima der (333) β - und der (224) α -Linie. Verbindet man die unteren Zacken der Schwärzungskurve der Grundschwärzung auf beiden Seiten von der (224) α -Linie durch eine gerade Linie, wie dies in Fig. 4 ersichtlich ist, so erkennt man eine plötzliche sprunghafte Änderung dieser unteren Zacken an den beiden durch Vertikalstriche angezeichneten Stellen. Diese Stellen zeigen die beiden Schwärzungssprünge an, die die Begrenzung der (224) α -Linie bilden. Vermißt man ihren senkrechten Abstand, so stimmt die ermittelte Zahl, multipliziert mit dem Übersetzungsverhältnis des Photometers, mit der subjektiv gemessenen Linienbreite der (224)-Linie $B = 4,68$ mm vollkommen überein. An dem Photometerdiagramm fällt uns ferner noch der plötzliche Abbruch der Schwärzung an den Linienenden an den beiden mit Pfeilen bezeichneten Stellen auf, zwischen welchen eine Hebung der Schwärzung durch die Überlagerung der (115) α - und der (044) β -Linie eintritt, die an beiden Seiten (333) α

sprunghaft abbricht. Die Begrenzung der (115) α -Linie ist auf der rechten, die der (044) β -Linie auf der linken Seite dieser Erhebung zu suchen. Auch das Photometerdiagramm läßt also die beiderseitige scharfe Begrenzung der Interferenzlinien deutlich erkennen und sind daher die Linienenden als physikalisch definierte Größen zu betrachten. Als radiale Interferenzlinienbreite soll dabei immer die durch Überlagerung der beiden Interferenzlinien K_{α_1} und K_{α_2} entstandene Linienbreite verstanden werden. Die Angabe der Linienbreite in Millimeter ist insofern willkürlich, als diese Größe von der verwendeten Kamera, bzw. von der Kegelscheitel-Präparatdistanz, abhängig ist.¹⁾

3. Mechanische Beanspruchung von Metallen

Wie Verf. schon an anderen Stellen zeigen konnte, nimmt die radiale Interferenzlinienbreite für sämtliche Metalle sowohl bei elastischer wie auch bei bildsamer Verformung²⁾ zu. Da der Kurvenverlauf sowohl für ruhende wie auch für schwingende Beanspruchung bei allen Metallen prinzipiell

1) Von der elementar durchzuführenden Umrechnung der Linienverbreiterung auf Schwankungen der Netzebenenabstände wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit der Versuchsergebnisse Abstand genommen.

2) F. Regler, Mitt. d. Techn. Versuchsanst. XXI. S. 31–46. 1932; Bericht a. d. II. Intern. Schienentagung, Zürich, 16.–19. Juni 1932, S. 188–201; Ergebn. d. techn. Röntgenkunde, III, S. 183–193. 1933.

den gleichen Charakter zeigt und sich die ermittelten Werte nur zahlenmäßig unterscheiden, konnten für das Studium des prinzipiellen Verhaltens Eisenproben herangezogen und von

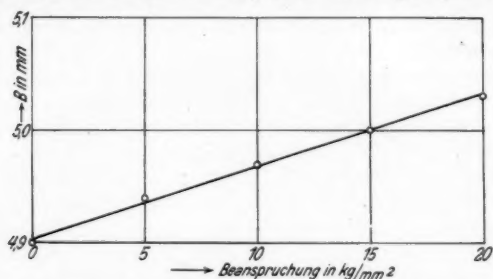


Fig. 5. Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der elastischen Zugbeanspruchung in kg/mm^2 für ein gewalztes Fe-Blech

der Anschaffung von Probestäben aus dem viel teureren Reinsilber Abstand genommen werden. Im Gebiet der elastischen Verformung zeigen Fig. 5 und Tab. 1 die Zunahme der Linien-

Tabelle 1

Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der elastischen Zugbeanspruchung in kg/mm^2 für ein gewalztes Fe-Blech

Beanspruchung in kg/mm^2	0	5	10	15	20
$B_{(022)}$ in mm	4,90	4,94	4,97	5,00	5,03

breite als Funktion der verformenden Kraft pro Quadratmillimeter an. Der funktionelle Zusammenhang zwischen der wirkenden Kraft und der Zunahme der radialen Interferenzlinienbreite im Gebiet der elastischen und bildsamen Verformung wird in Fig. 6 und Tab. 2 dargestellt; während die Untersuchungen im elastischen Gebiet unter Belastung vorgenommen wurden, wurden im Gebiet der bildsamen Verformung die Proben 1 Min. auf der angegebenen Beanspruchung

Tabelle 2

Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der Zugbeanspruchung für einen Probestab aus weichem Flußstahl

Beanspruchung in kg/mm^2	0,0	29,6	31,6	33,6	35,6	37,6	39,5
$B_{(022)}$ in mm	3,32	4,00	4,56	5,06	5,53	6,07	6,61

gehalten, darauf entlastet und der röntgenographischen Untersuchung unterzogen. Werden die untersuchten Eisenproben sodann etwa 1 Stunde lang auf 100°C erwärmt, so gleichen sich die elastischen Spannungen wenigstens teilweise aus und nehmen die für das plastische Gebiet erreichten Werte für die radiale Linienbreite um den entsprechenden Betrag und

zwar um etwa $0,1-0,2$ mm ab.

Trägt man diese Zusammenhänge nicht in Abhängigkeit von der verformenden Kraft, sondern von der Verformung selbst auf, so erhält man einen Kurvenverlauf, der dem Last-Dehnungsschaubild ähnlich ist. Während die radiale Interferenzlinienbreite in Abhängigkeit von der Verformung anfangs sehr stark und für größere Verformungswerte schwächer zunimmt, nehmen die Werte für die Linienbreite als Funktion der verformenden Kraft sowohl im elastischen als auch im Gebiet der bildsamen Verformung linear, jedoch mit verschiedenen Neigungswinkeln zu. Die Größe dieses Neigungswinkels ist von der Anfangslinienbreite

des Ausgangsmaterials abhängig. Bei jeder ruhenden, gerichteten Formänderung nimmt ferner die *periphere Breite* der Interferenzpunkte¹⁾ sowohl im elastischen als auch im plastischen Gebiet linear mit der Verformung zu, während die Arkel-aufspaltung mit zunehmender Verformung immer mehr verschwindet, bis beim Auftreten einer Verformungstextur keine Trennung der beiden Linien mehr erkennbar ist. Der höchste Wert für die radiale Linienbreite bei der bildsamen Verformung der Fig. 6 kommt der Bruchstelle zu, ist also der für das betreffende Material überhaupt erreichbare Höchstwert.

Läßt man die Kraft nicht als ruhende Kraft auf das Material einwirken, sondern setzt man einen Amslerschen Dauerbiegestab bei 10^7 Lastwechsel verschiedenen Be-

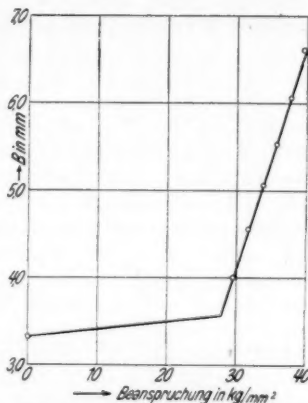


Fig. 6. Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der Zugbeanspruchung in kg/mm^2 für einen Probestab aus weichem Flußstahl

1) F. Regler, Phys. Ztschr. 33. S. 435—438. 1932; Mitt. d. Techn. Versuchsamt, 1932. S. 36 u. f.

anspruchungen aus, so erhält man mittels der röntgenographischen Untersuchung einen Kurvenverlauf, der dem in Fig. 6 abgebildeten Verlauf vollkommen ähnlich ist. Nur sind bei letzterer Art der Beanspruchung auch die unterhalb des Schnittpunktes der beiden Geraden liegenden Werte für die radiale Linienbreite nach Entfernung der Last bleibend, während diese Werte bei den Kurven 5 und 6 bei kurzzeitiger ruhender Beanspruchung reversibel sind. Variiert man

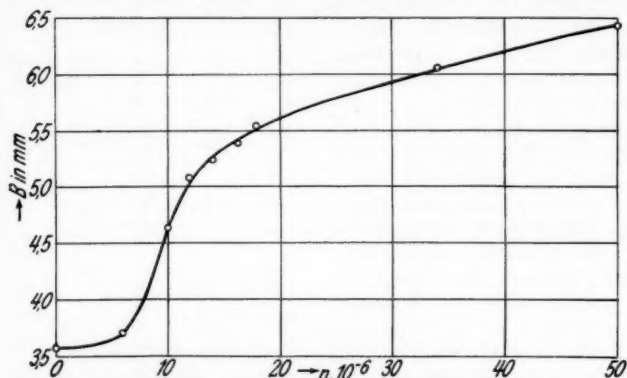


Fig. 7. Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der Schwingungszahl n bei gleichbleibender Beanspruchung von 24 kg/mm^2 für Probestäbe aus Flußstahl

bei konstanter wirksamer Kraft pro Flächeneinheit für verschiedene Probestäbe die Lastwechselzahl, so erhält man die in Fig. 7 (Tab. 3) ersichtliche Kurve. Bei ($n = 50 \cdot 10^6$ erfolgte

Tabelle 3

Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der Schwingungszahl n bei gleichbleibender Beanspruchung von 24 kg/mm^2 für Probestäbe aus Flußstahl

$n \cdot 10^{-6}$	0	6	10	12	14	16	18	34	50
$B_{(022)}$ in mm	3,58	3,70	4,64	5,09	5,24	5,41	5,55	6,06	6,42

noch kein Bruch). Sie widerlegt die öfters von technischer Seite aufgestellte Behauptung, daß ein Probestab, der, ohne zu brechen, 10^7 Lastwechsel aushält, jede beliebige Zahl von Lastwechseln ohne Schaden erträgt. Im Gegensatz zur ruhenden Beanspruchung zeigt die schwingende Beanspruchung schon bei ganz geringer Krafteinwirkung und entsprechend großer

Lastwechselzahl eine bleibende Zunahme der radialen Interferenzlinienbreite. Obwohl bei schwingender Beanspruchung für die Linienbreite gleich hohe Werte erreicht werden wie bei ruhender Beanspruchung, zeigen die nur schwingend beanspruchten Probestäbe eine *Abnahme* der *peripheren Interferenzpunktbreite* und daher eine große Zahl feiner Interferenzpunkte, die durchweg die Arkelaufspaltung¹⁾ erkennen lassen. Es kann also auch trotz hoher Werte für die Linienbreite die Arkelaufspaltung vorhanden sein. Die Interferenzpunkte bei wechselbeanspruchten Proben haben aber nicht alle gleichen Abstand vom Kegelscheitel, sondern liegen innerhalb der Linienbreite mit verschiedenen Abständen eingestreut. Durch eine große Anzahl von Untersuchungen konnte der Beweis erbracht werden, daß jedes Metall gleicher chemischer Zusammensetzung an der Bruchstelle einen für jedes Material *charakteristischen* und von der Vorbehandlung unabhängigen Wert der radialen Linienbreite liefert, unabhängig auch davon, auf welche Weise der Bruch hervorgerufen wurde. Unter den eingangs erwähnten Aufnahmebedingungen erfolgt z. B. der Bruch von technischem Schweißeisen immer bei einem Wert von $B_{(022)} = 6,33$ mm. Für Flußeisen liegt die charakteristische Bruchlinienbreite bei $B_{(022)} = 6,62$ mm, für reines Silber bei $B_{(224)} = 7,19$ mm. Diese Konstante ist nur von den Metallen selbst bzw. von ihren Legierungen oder chemischen Verbindungen abhängig.

Unterliegt ein Metall z. B. Eisen, einer gerichteten elastischen Kraft und erleidet es gleichzeitig durch längere Zeit, z. B. durch viele Jahre schwingende Beanspruchung, so läßt, wie Verf. zeigen konnte, das Röntgendiagramm dieses Metalls eine vollkommen ausgebildete Faserstruktur erkennen (die vorher nicht vorhanden war), ohne daß das Metall eine größere als die durch die elastische Beanspruchung hervorgerufene Dehnung erfahren hätte. Unter gewissen günstigen Bedingungen kann also im Röntgendiagramm eine Faserstruktur auftreten, ohne daß das Material eine größere Formänderung erfährt (Kristallverdrehung). Aber auch bei gerichteter Beanspruchung, z. B. Zugbeanspruchung ist wenigstens im Gebiet der bildsamen Verformung bei konstant gehaltener Beanspruchung die Linienverbreiterung von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig und es muß daher bei derartigen Untersuchungen der Faktor Zeit immer mitberücksichtigt werden.

4. Verbreiterung der Interferenzlinien bei Temperaturerhöhung

Während bei der Untersuchung der mechanischen Beanspruchung von Eisen die $(022)\alpha$ -Linie herangezogen und auf

1) U. Dehlinger, Naturwiss., 17. S. 545. 1929.

die Vermessung der $(112)\alpha$ -Linie wegen der eventuellen Beeinflussung dieser Linienbreite durch die Divergenz der primären Röntgenstrahlung verzichtet wurde, wurde für die Untersuchungen an den Silberproben die $(224)\alpha$ -Linie gewählt; die Intensität der $(115)_{(333)}\alpha$ -Linie erschien infolge des schiefen Schnitts der gebeugten Röntgenstrahlung mit dem kegelförmigen Film zu gering und die $(024)\alpha$ -Linie lag bereits in dem von der Divergenz der primären Röntgenstrahlung beeinflussten Gebiet. Die radiale Interferenzlinienbreite des zur Untersuchung gelangenden Ag-Blechtes betrug nach dem Biegen um den Ni-Stabträger $B_{(224)} = 4,68$ mm, gab somit sowohl durch den hohen Wert für die Linienbreite als auch durch die Walzstruktur und das Fehlen der Arkelaufspaltung deutlich Zeugnis von einem höheren Grad der Verformung. Da beim Erwärmen dieser Proben die elastischen Spannungen derselben zum Ausgleich kommen und dadurch den Einfluß der Temperatur vergrößern oder verkleinern, wurde die Versuchsreihe dreimal durchgeführt und über sämtliche erhaltenen Werte gemittelt. Die

Tabelle 4
Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm
von der Temperatur für verschiedene Silberproben

Temperatur in °C	$B_{(224)}$ in mm				
	Kurve I			Kurve II	Kurve III
	×	⊙	●	○	● **)
20	4,75*)	4,60*)	4,68*)	3,08	4,68
230	4,82	4,80	—	3,15	—
340	—	—	4,86	—	4,29
450	5,01	4,85	—	3,42	—
550	—	—	—	3,87	—
560	—	5,54	5,30	—	3,97
650	5,88	—	—	—	—
660	—	—	—	4,65	—
680	—	5,70	—	—	—
750	—	6,15	—	5,64	—
830	—	6,60	—	6,46	—
860	6,71	—	—	—	—
870	—	—	6,74	—	3,29
900	—	6,88	—	—	—
940	—	—	—	7,00	—
962	—	—	—	—	3,08

*) Die geringfügigen Unterschiede in den Anfangslinienbreiten der Kurve I sind durch den bei der Probenherstellung entstandenen verschiedenen Kaltverformungsgrad der Silberproben bedingt.

**) Nach dem Erkalten.

erhaltenen Werte der drei Versuchsreihen sind in Kurve I der Fig. 8 mit \times , \odot und \bullet gekennzeichnet. Die der Fig. 8 entsprechenden Zahlenwerte sind in Tab. 4 zusammengestellt. Die Kurve II in Fig. 8 rührt von einer Ag-Probe her, die, ohne von dem Ni-Stab entfernt zu werden, bis knapp über den Schmelzpunkt erhitzt wurde und daher keine inneren Spannungen mehr aufweist, wodurch sämtliche Streuungen der Meßpunkte vom wahren Kurvenlauf in Wegfall kommen. Während die beiden ersten Versuchsreihen der Kurve I und die Versuchsreihe der Kurve II in der Form ausgeführt wurden, daß die Temperatur von Meßpunkt zu Meßpunkt gesteigert wurde, ohne die Proben abzukühlen und für jeden Meßpunkt die Temperatur so lange gehalten wurde, bis sich ein stationärer Zustand einstellen konnte, gelangte für die Durchführung der dritten Versuchsreihe der Kurve I (in der Fig. 8 mit \bullet eingezeichnet) ein anderes Verfahren zur Anwendung. Für diese Versuchsreihe wurde von vier

Proben des gleichen Ag-Blechtes, also sämtliche mit gleicher Anfangslinienbreite (4,68 mm), je eine Probe auf die eingezeichnete Temperatur gebracht und ungefähr eine halbe Stunde auf dieser Temperatur gehalten. Nach langsamem Abkühlen jeder dieser vier Proben auf Zimmertemperatur wurde von ihnen eine Röntgenaufnahme gemacht und die in Kurve III wiedergegebenen Werte gewonnen. Aus dieser Kurve geht die Abhängigkeit der Kristallgitteraufteilung von der Höhe der Glühtemperatur deutlich hervor.

Wie den Kurven I und II sofort zu entnehmen ist, stellt sich die radiale Interferenzlinienbreite bei der Schmelztemperatur wieder als charakteristische Materialkonstante dar und ist vom Verformungsgrad der Proben unabhängig. Die kristallographischen Eigenschaften eines Metalls decken sich also beim

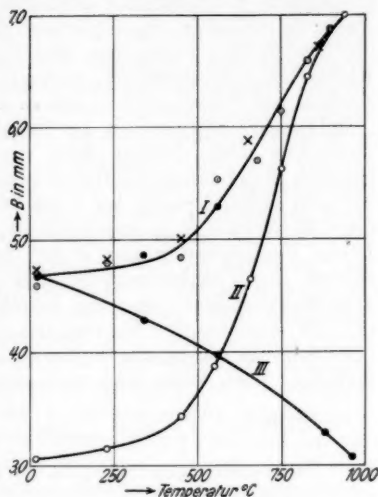


Fig. 8. Abhängigkeit der radialen Interferenzlinienbreite B in mm von der Temperatur für verschiedene Ag-Proben

Schmelzpunkt vollständig. Dies zeigt auch die Tatsache, daß jede bis zum Schmelzpunkt erhitzte Ag-Probe nach langsamem Erkalten eine konstante Linienbreite von $B_{(224)} = 3,08$ mm liefert, unabhängig vom Kaltverformungszustand des Ausgangsmaterials.

Die bei hohen Temperaturen erhaltenen Werte für die radialen Linienbreiten der Kurven I und II sind mit den bei niedrigeren Temperaturen gewonnenen Werten allerdings nicht direkt vergleichbar, da sich infolge der thermischen Ausdehnung der Glanzwinkel verkleinert und sich die Interferenzlinien vom Kegelscheitel wegschieben, weshalb die Werte für die Linienbreiten bei höheren Temperaturen wegen der geometrischen Abbildungsverhältnisse in der Kegelkamera als relativ zu klein anzusehen sind. Nimmt man der Einfachheit wegen einen linearen Ausdehnungskoeffizienten des Silbers von $1,846 \cdot 10^{-5}$ bis zum Schmelzpunkt bei rund 962°C an, so verkleinert sich der Glanzwinkel $\vartheta_{(224)}$ von 20°C bis auf 962°C um rund $2^\circ 16'$. Diese Verkleinerung von ϑ hat bis zum Schmelzpunkt des Silbers eine Verschiebung der (224)-Interferenzlinie um 3,5 mm vom Kegelscheitel gegen die Kegelgrundfläche zur Folge. Da für die beiderseitige Begrenzung der (224)-Linie, wie schon oben erwähnt wurde, nur die parallele primäre Röntgenstrahlung maßgebend ist, kann man nach der Formel

$$B' = x + \bar{x} = B + \frac{2m \sin \alpha \sin \Delta \vartheta}{\sin (2\vartheta - \alpha) \sin (2\vartheta - \alpha - \Delta \vartheta)} \quad 1)$$

für die radiale Interferenzlinienbreite bei Beugung an gestörten Kristallgittern die Veränderung der Linienbreite durch Verkleinerung des Glanzwinkels ϑ um $2^\circ 16'$ errechnen. In dieser Formel bedeutet B' die durch Beugung streng monochromatischer Röntgenstrahlung (nicht des Dupletts) an einem gestörten Kristallgitter entstandene radiale Interferenzlinienbreite; unter $x - \frac{\bar{B}}{2}$ versteht man die Verbreiterung dieser Interferenzlinie gegen die Kegelgrundfläche für die Beugung des Röntgenstrahlenbündels an einem gestörten Kristallgitter, während $\bar{x} - \frac{\bar{B}}{2}$ die Verbreiterung in der Richtung des Kegelscheitels angibt, so daß die gesamte Linienbreite $B' = x + \bar{x}$ beträgt. B ist die Linienbreite, die durch Beugung streng paralleler monochromatischer Röntgenstrahlung an einem ungestörten Kristallgitter erhalten würde. Für sie gilt die Beziehung $\bar{B} = b \frac{\cos 2\vartheta}{\sin (2\vartheta - \alpha)}$, wobei mit b der Durchmesser

1) F. Regler, Ztschr. f. Phys. 74. S. 562. 1932.

der Blende bezeichnet ist. Mit m wird der Abstand Kegelscheitel-Untersuchungsmaterial bezeichnet, während ϑ den Glanzwinkel des ungestörten Kristallgitters, $\Delta\vartheta$ die beiderseitige Abweichung von diesem Glanzwinkel durch die Kristallgitterstörung und α den halben Öffnungswinkel der verwendeten Kegelkamera darstellen.

Da die radiale Interferenzlinienbreite beim mechanischen Bruch von Silber bei 20°C $B_{(224)} = 7,19\text{ mm}$ beträgt, kann man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich diese Linienbreite durch Superposition zweier Wellenlängen ergibt und unter der allerdings nur ganz näherungsweise gültigen Voraussetzung, daß die Abweichung vom normalen Winkel ϑ nach beiden Richtungen um den gleichen Betrag $\Delta\vartheta$ erfolgt, für eine Temperatur von 962° eine radiale Linienbreite von $B_{(224)} = 6,65\text{ mm}$ errechnen. Einer solchen Berechnung liegt die erst zu beweisende Voraussetzung zugrunde, daß sich der Wert für $\Delta\vartheta$ der Linienbreite beim Bruch bei Erhöhung der Temperatur der Probe nicht verändert. Durch die thermische Ausdehnung kann man überschlagsmäßig auf einen Rückgang der radialen Interferenzlinienbreite von max. $7,6\%$ beim Schmelzpunkt des Silbers schließen. Je tiefer man mit der Temperatur geht, desto geringer wird auch die prozentuelle Abnahme der Linienbreite durch die thermische Ausdehnung der Elementarzelle. Um diese Berechnungen durchführen zu können, wurde allerdings die Annahme gemacht, daß die untersuchte Probe kubisch bleibt, eine Annahme, welche sich im Verlauf der weiteren Untersuchungen als nicht stichhaltig erweisen wird. Da es sich als experimentell sehr schwierig erwies, die röntgenographische Untersuchung knapp vor dem Schmelzen der Probenoberfläche bei 940° vorzunehmen, ist auch der Wert $B_{(224)} = 7,00\text{ mm}$ nicht mit derselben Sicherheit anzugeben wie die Werte bis ungefähr 900°C . Rechnet man den Wert $B_{(224)} = 7,00\text{ mm}$ unter den angegebenen Bedingungen und unter der Voraussetzung, daß der lineare Ausdehnungskoeffizient für diese hohen Temperaturen noch Gültigkeit besitzt, auf die Linienbreite bei Zimmertemperatur um, so erhält man $B_{(224)\text{ kor.}} = 7,58\text{ mm}$. Unter Bedachtnahme der begangenen Vernachlässigungen zur Berechnung des Umrechnungsfaktors, sowie der Überlegung, daß Silber bei diesen hohen Temperaturen größere Gasmengen aus der Luft aufzunehmen imstande ist, die wie jede Beimengung von Fremdatomen eine Erhöhung der radialen Linienbreite um einige Zehntel Millimeter hervorrufen, kann man annehmen, daß zwischen der radialen Interferenzlinienbreite beim mechani-

schen Bruch von Silber und der beim Schmelzpunkt eine vollständige *Übereinstimmung* besteht. Der Unterschied zwischen den beiden Werten von rund 5% läßt sich aus den angegebenen Fehlerquellen, besonders aber durch die Gasaufnahme aus der Luft, durch welche der Wert $B_{(224)} = 7,00$ mm gegenüber derselben Untersuchung im Vakuum als zu groß anzusehen ist, zwanglos erklären. Da wir über diese Fehlerquellen keine genauen Kenntnisse besitzen, sind in der Fig. 8 bzw. in Tab. 4 die experimentell gefundenen Werte ohne jede Korrektur eingetragen.

An dieser Stelle verdient auch noch das Aussehen der Röntgendiagramme bei höheren Temperaturen eine eingehendere Betrachtung. Wie schon Maurice de Broglie¹⁾ zeigen konnte, ändern die Lauepunkte bei höheren Temperaturen ihr Aussehen nicht wesentlich. Weist das Röntgendiagramm eines kaltgewalzten Silberbleches bei Zimmertemperatur wohl Faserstruktur, jedoch keine Interferenzpunkte und keine Arkelaufspaltung auf, so zeigt das Röntgendiagramm desselben Silberbleches bei 230° C trotz einer Zunahme der radialen Linienbreite von $B_{(224)} = 4,60$ mm bei 20° auf $B_{(224)} = 4,80$ mm eine deutlich erkennbare Arkelaufspaltung der Interferenzlinien und das Auftreten zahlreicher kleiner Interferenzpunkte, obwohl die Faserstruktur aus der Anreicherung der Interferenzpunkte noch immer vollständig erhalten ist. Bei 450° hat das Diagramm ein ähnliches Aussehen wie bei 230°, nur daß die Interferenzpunkte noch feiner sind als bei 230°. Auch die Röntgendiagramme von 560, 680 und 750° C zeigen noch die Faserstruktur, sehr feine Punkte und die deutlich ausgeprägte Arkelaufspaltung der Interferenzlinien bzw. der einzelnen Interferenzpunkte. Im Röntgendiagramm bei 830° zeigen sich nadelstichartige Interferenzpunkte, die sämtlich die Arkelaufspaltung besitzen und innerhalb der Linienbreite mit verschiedenem Abstand vom Kegelscheitel zu liegen kommen. Während bei den niedrigeren Temperaturen die Arkelaufspaltung der Interferenzlinie vorherrscht, ist bei höheren Temperaturen nur mehr die Arkelaufspaltung der Interferenzpunkte deutlich erkennbar. Da die Interferenzpunkte mit zunehmender Temperatur intensiver geschwärzt werden (um bei hohen Temperaturen allerdings wieder an Schwärzungsintensität zu verlieren), während die Schwärzung der kontinuierlichen Interferenzlinie immer schwächer wird, erweckt das Röntgendiagramm bei höheren Temperaturen bei flüchtiger Beobachtung den Ein-

1) M. et L. de Broglie, Einführung in die Physik der Röntgen- und Gammastrahlen, Leipzig 1930, S. 167.

druck, als ob nur isolierte Interferenzpunkte vorhanden wären. Tatsächlich sind die Punkte aber einer gleichmäßig geschwärmten Interferenzlinie überlagert, und ist der Schwärzungssprung an den Liniendenen genügend deutlich. Oberhalb eines bestimmten Temperaturwertes wird die Zahl der Interferenzpunkte merklich geringer und ihre Intensität schwächer. Immer aber ist trotz des hohen Wertes für die Linienbreite die Arkelaufspaltung der Interferenzpunkte vorhanden. Nach langsamem Erkalten einer bis knapp oberhalb des Schmelzpunktes gebrachten Probe treten wieder große, intensiv geschwärmte Interferenzpunkte auf, die meist die Größe und die projizierte Form der Blende besitzen. Bei Steigerung der Temperatur in dieser sehr grobkristallinen Probe werden die Interferenzpunkte wieder feiner und seltener.

Erhöht man die Temperatur einer kalt gewalzten Silberprobe mit Faserstruktur z. B. auf 340° und läßt die Probe langsam erkalten (Fig. 8, Kurve III), so zeigt das Kegeldiagramm trotz der geringen Abnahme der Linienbreite $B_{(224)}$ von 4,68 mm auf 4,29 mm eine vollständige Arkelaufspaltung der Interferenzlinien, obwohl die gewalzte und nicht wärmebehandelte Ausgangsprobe keine Aufspaltung erkennen läßt. Die Arkelaufspaltung tritt also bei wärmebehandelten und erkalteten Metallen lange vor der vollständigen Ausheilung der Kristallgitterstörungen ein. Dieselbe Erscheinung wiederholt sich auch bei Erwärmung der Proben auf höhere Temperaturen und nachherigem langsamen Erkalten. Nach dem Schmelzen zeigt die erkaltete Probe nur mehr wenige Interferenzpunkte, die einer Interferenzlinie von niedrigstem vorkommenden Wert der Linienbreite überlagert sind, somit ein vollkommen ausgeheiltes Kristallgitter besitzt. Diese Probe besitzt ein ausgesprochenes Grobkorngefüge.

5. Laueuntersuchungen an Silberproben bei hohen Temperaturen

Da sich im Kegelreflexionsverfahren bei Verwendung monochromatischer Röntgenstrahlung eine Un-

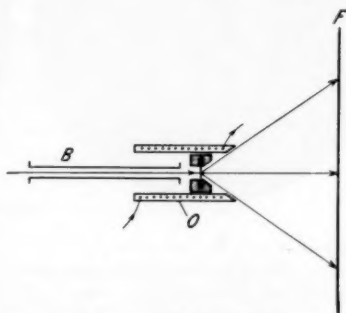


Fig. 9. Schema der Versuchsanordnung zur Aufnahme von Lauediagrammen bei hohen Temperaturen.
B Blende, F Film,
O Widerstandsofen

terscheidung zwischen einem grobkörnigen und einem feinkörnigen Gefüge, welches letzteres im Lauediagramm infolge gewisser Kristallorientierungen Asterismen liefert, nicht treffen läßt, da in



Fig. 10. Lauediagramme eines kaltgewalzten Silberbleches
a) bei Zimmertemperatur, b) in der Nähe des Schmelzpunktes,
c) nach oberflächlichem Schmelzen und nachherigem Erkalten
auf Zimmertemperatur

beiden Fällen Interferenzpunkte entstehen, wurden an Silberproben bei höheren Temperaturen Untersuchungen auch nach dem Laueverfahren ausgeführt. Zur Durchführung dieser Unter-

suchungen wurde eine Probe aus kaltgewalztem Silberblech von 0,1 mm Dicke in einem Eisenring befestigt und mittels eines elektrischen Widerstandsofens erhitzt, wie dies aus Fig. 9 zu ersehen ist. Um eine Erhitzung des photographischen Films zu vermeiden, wurde dieser mit einer dünnen, glänzenden Aluminiumfolie bedeckt. Die Laueuntersuchungen wurden bei den verschiedensten Temperaturen vorgenommen, jedoch können hier der Kürze wegen nur einige charakteristische Lauediagramme wiedergegeben werden. Fig. 10a zeigt das Lauediagramm einer Silberprobe bei Zimmertemperatur; die Walzstruktur ist deutlich zu erkennen, dennoch zeigen sich noch Asterismen, die im Reflexionsdiagramm nicht mehr zur Auflösung gelangen. Fig. 10b gibt das Lauediagramm einer Silberprobe knapp unterhalb des Schmelzpunktes wieder. Die Walzstruktur ist noch gut sichtbar, auch Asterismen, wenn auch kürzer und in geringerer Zahl als in Fig. 10a, sind noch vorhanden. Es ist dies wieder ein Beweis für die vom Verf. schon an anderer Stelle aufgestellte Behauptung¹⁾, daß Asterismen nur als Zeichen für eine bestimmte Anordnung der Kristalle zu werten sind, keineswegs aber als Merkmal für elastische Spannungen, da bei einem schon bildsamen Silberblech in der Nähe des Schmelzpunktes bereits ein Ausgleich der elastischen Spannungen erfolgt sein muß. Die Diagramme 10a und 10b sind einander sehr ähnlich, nur ist das Gefüge der Probe 10b grobkörniger als das der Probe 10a. Läßt man das bis zum Schmelzpunkt erhitzte Silberblech langsam erkalten, so erhält man die Fig. 10c, welche nur mehr wenige Asterismen erkennen läßt, dafür aber zahlreiche Lauepunkte, also grobes Korn aufweist. Die noch vorhandenen Asterismen und die schwache Spur einer Walzstruktur rühren vom Blechinnern her, das noch nicht geschmolzen war. Die wirkliche Kornneubildung und die Umkristallisation erfolgt also für Silberblech erst nach dem Überschreiten des Schmelzpunktes.

6. Erörterung der Untersuchungsergebnisse

Im folgenden soll versucht werden, aus den experimentell ermittelten Erkenntnissen eine modellmäßige Vorstellung der Veränderungen der Elementarzelle eines Metalles, sowohl bei mechanischer Beanspruchung als auch bei Temperaturerhöhung zu gewinnen.

1) F. Regler, Phys. Ztschr. **33**. S. 435. 1932; *Ergebn. d. techn. Röntgenkunde III*, 1933, S. 187.

Wird ein langer, zylindrischer Metallstab mit kleinem Durchmesser einer Zugbeanspruchung ausgesetzt, müßte nach den herkömmlichen Anschauungen die durch die Verformung bedingte Schwankung der Netzebenenabstände, also auch die Größe der radialen Interferenzlinienbreite, abgesehen von den durch den Reibungswiderstand der Kristalle bedingten Nebenspannungen, von dem Winkel zwischen der Netzebenennormalen und der Kraftrichtung abhängig sein. Da im Kegeldiagramm unter allen vorhandenen Netzebenen (hkl) nur jene zur Erzeugung der Interferenzlinien herangezogen werden, deren Normale einen Kegelmantel mit dem Öffnungswinkel $\pi - 2\vartheta$ um den primären Röntgenstrahl als Achse bilden, müßte unter dieser Annahme sowohl die radiale Interferenzlinienbreite entlang der Linie selbst schwanken als auch von dem Winkel zwischen dem primären Röntgenstrahlenbündel und der Kraftrichtung abhängig sein. Zahlreiche Versuche des Verf. haben nun eindeutig ergeben, daß die Linienbreite entlang der ganzen Länge der Interferenzlinien bei allen Metallen konstant bleibt und selbst bei Vorhandensein einer ausgeprägten Faserstruktur, die physiologisch den Eindruck einer sichelförmigen Schwärzung der Interferenzlinie hervorruft, sich nicht verändert, da selbst im letzteren Fall nur die mittlere starke Schwärzung der Interferenzlinie, nicht aber die schwachen Linienenden betroffen sind.

Auch der Einfluß einer Veränderung des Winkels zwischen dem primären Röntgenstrahlenbündel und der Kraftrichtung auf die Linienbreite wurde an verschieden vorgereckten Feststäben eingehend untersucht, wobei sowohl die (112)- als auch die (022)-Linie vermessen wurden. Für alle untersuchten Winkelbereiche ergab sich eine vollkommene Übereinstimmung der einzelnen Werte für die Linienbreite. Speziell für das Gebiet der bleibenden Verformungen, wahrscheinlich auch für das Gebiet der elastischen Formänderung, kann nicht angenommen werden, daß die Elementarzellen vielkristalliner Metalle unter dem Einfluß von Kräften dieselben Verformungen erleiden wie der Probekörper selbst. Die Zunahme der Linienbreite und damit die Differenz der einem bestimmten Beanspruchungsgrad entsprechenden Netzebenenabstände d. h. $d_{\max} - d_{\min} = \text{const.}$ gilt für eine untersuchte Stelle und für alle Netzebenen in einem bestimmten Volumelement, ohne Rücksicht auf ihre Lage gegenüber der verformenden Kraft. Mit dieser Tatsache stimmt auch das Versuchsergebnis überein, demzufolge eine Rückverformung eines bleibend verformten Metalles nur eine Erhöhung der radialen Linienbreite hervorruft, obwohl die Gleitung der Kristalle rückgebildet werden

kann. Daß vom Verf. seinerzeit¹⁾ bei Zugversuchen an Stählen keine Zunahme der Breite der (002)-Linie nachgewiesen werden konnte [die Breite der (022)- und (112)-Linie nahm erheblich zu], während eine solche bei Dauerbiegeversuchen zu erkennen war, fand nach eingehender Beobachtung seine Erklärung darin, daß die für beide Untersuchungen zur Verfügung gestandenen Proben chemisch voneinander sehr stark verschieden waren, so daß das abweichende Ergebnis der ersteren Untersuchung nur als eine zufällige und keine prinzipielle Erscheinung anzusehen ist. Nach den gewonnenen Erkenntnissen dürfte bei jeder Art einer Beanspruchung von Metallen die Breite sämtlicher Interferenzlinien zunehmen und an der Bruchstelle die entsprechenden Linien immer die gleiche Breite besitzen.

Das Vorhandensein einer stets scharfen Begrenzung der Interferenzlinien sowie das Vorkommen der Arkelaufspaltung bei Dauerbiegeproben und Versuchsproben bei höheren Temperaturen widerspricht der Annahme einer Verbiegung der Netzebenen als Ursache für die Linienverbreiterung. Auf Grund dieser experimentellen Ergebnisse muß vielmehr an der Gültigkeit der Bragg'schen Gleichung auch bei kalt verformten Metallen und bei Metallen von höherer Temperatur festgehalten werden, womit die Annahme einer regelmäßigen Periodizität der Atomanordnung auch in diesen Fällen verbunden erscheint. Eine regelmäßige Periodizität der Atomanordnung hat aber immer ein ungestörtes Kristallgitter zur Folge. Wenn trotz eines ungestörten Kristallgitters eine Verbreiterung der radialen Linienbreite eintritt, muß eine Veränderung des Kristallsystems unter dem Einfluß der oben beschriebenen Metallbehandlung angenommen werden, die für kubisch kristallisierende Metalle mit einer Erniedrigung der Gittersymmetrie, also mit einem Einstellen in ein niedrigersymmetrisches Kristallsystem verbunden sein muß. Dann läßt sich die Verbreiterung der Interferenzlinien dadurch erklären, daß die Netzebene (hkl) einen etwas anderen Glanzwinkel besitzt als etwa die Netzebene (hhl), der aber nicht soweit verschieden ist, daß eine Trennung der Interferenzlinie erfolgt, wohl aber eine Verbreiterung derselben eintreten muß.

Sind möglichst alle Kristalle von dieser Veränderung der Kristallgitterstruktur betroffen, wie dies bei Erhöhung der Temperatur stets der Fall ist, dann besitzt das Metall einen einheitlichen Gittertypus, der dem betreffenden Temperaturwert entspricht und daher die Arkelaufspaltung zeigen muß. Je

1) F. Regler, Ztschr. f. Phys. 82. S. 351. 1933.

nachdem nun, ob bei höheren Temperaturwerten mit schön ausgebildeten Glanzflächen die Interferenzpunkte durch Beugung an einer Netzebene (hkl) oder etwa an der Netzebene (hkh) entstehen, liegen diese Punkte näher oder weiter vom Kegelscheitel entfernt, immer aber innerhalb der Grundschwärzung der Interferenzlinie. Es besteht also zwischen einem hohen Wert für die Linienbreite und dem Vorhandensein der Arkelaufspaltung kein Widerspruch, da die Arkelaufspaltung nur anzeigt, daß das Kristallsystem innerhalb der beobachteten Fläche homogen ist, ohne über den veränderten Zustand des Gittertypus eine Aussage zu machen. Daraus folgt auch, daß selbst auf nur niedrige Temperaturen erhitze, kaltgewalzte Metallproben nach langsamem Erkalten die Arkelaufspaltung zeigen, ohne einen stärkeren Rückgang ihrer Interferenzlinienbreite aufzuweisen. Die zugeführte Wärmeenergie reichte in diesem Falle nur zur teilweisen Homogenisierung des Gitters, nicht aber zur Rückführung in das kubische System desselben aus. Im übrigen ist das Kristallgitter aller kubisch kristallisierenden Metalle auch bei Zimmertemperatur noch nicht im ideal kubischen Zustand. Diese Feststellung ergibt sich sowohl aus der Tatsache, daß auch für vollkommen entspannte, chemisch reine Metalle die radiale Linienbreite bei Zimmertemperatur immer die für ein ideales Gitter errechnete übersteigt, ferner aus der Tatsache, daß bei Versuchen bei tieferen Temperaturen, welche vom Verfasser mit CO_2 -Schnee an Ag-, Cu- und Fe-Proben vorgenommen wurden, stets ein Rückgang der radialen Linienbreite gegenüber der bei Zimmertemperatur erhaltenen zu verzeichnen war. Da bei Temperaturerhöhung alle Kristalle von dieser Veränderung ergriffen sind, haben die Interferenzlinien nur geringe Schwärzungsmaxima in der Linienmitte, abgesehen von den innerhalb der Linie verteilten Interferenzpunkten. Daß die Interferenzlinien bei höheren Temperaturwerten trotzdem eine geringe Gesamtschwärzung aufweisen, ist einerseits auf die Homogenisierung der Schwärzung, andererseits aber auf das verringerte Beugungsvermögen des Gitters bei höheren Temperaturen zurückzuführen.

Bei elastischer Dauerbeanspruchung, z. B. bei Dauerbiegebeanspruchung von Metallen zeigen die Röntgendiagramme ein ähnliches Verhalten wie bei der Temperaturerhöhung, da bei dieser Art der Beanspruchung durch die geringe, dauernde Einwirkung der Kräfte offenbar ebenfalls viele vorhandenen Kristalle auf den gleichen Energiezustand gebracht werden, also die ehemals kubischen Elementarzellen in das der Beanspruchung entsprechende neue Kristallsystem überführt werden.

Bei kurzzeitigem Zug, Druck oder Kaltwalzen von Metallen, bei welchem Vorgang durch die Kürze der einwirkenden Beanspruchungsdauer sowie durch den Gleitvorgang die Kristalle verschiedene Energiemengen zugeführt erhalten, treten auch alle möglichen Kristallformen von unbeanspruchten bis zu den der zugeführten Energiemenge entsprechenden maximalen Kristallveränderungen auf. Die Verschiedenheit der vorhandenen Kristallsysteme in einem kurzzeitig gezogenen oder kalt gewalzten Metall ist auch die Ursache des Fehlens der Arkelaufspaltung. Bei Dauerbeanspruchung weisen die *Interferenzpunkte* fast immer die Arkelaufspaltung auf. Fehlen bei einem dauerbeanspruchten Metall die Interferenzpunkte, so zeigt die *Interferenzlinie* keine Arkelaufspaltung, da sich die einzelnen Interferenzen bei gestörtem Kristallgitter überlagern und so die Arkelaufspaltung der einzelnen gebeugten Strahlen nicht erkennen lassen. Eine Interferenzlinie weist meist dann die Arkelaufspaltung auf, wenn die Beugung der Röntgenstrahlen an einem idealen bzw. fast idealen Kristallgitter erfolgt.

Die Zunahme der radialen Interferenzlinienbreite als Folge jedweder mechanischer, magnetischer¹⁾ oder thermischer Beanspruchung ist also nicht auf eine den makroskopischen Metallveränderungen analoge Veränderung der Elementarzellen, sondern auf eine Veränderung des Kristallsystems zurückzuführen. Diese Veränderungen lassen sich auf einfache Weise durch eine Erhöhung des Energiegehaltes der Atome erklären. Nimmt man nämlich an, daß jede Erhöhung des Energiegehaltes eines Atoms mit einer Veränderung der Elektronenbahnen verbunden ist, wobei die neuen Elektronenbahnen die energiereicheren darstellen, und nimmt man ferner an, daß sich diese Veränderung der Elektronenbahnen in erster Linie auf die Hüllenelektronen erstreckt, so muß eine solche Verlagerung der Hüllenelektronen auch eine Veränderung des Kraftfeldes zur Folge haben, das die Bindung der Atome und ihre regelmäßige Anordnung zu Elementarzellen bedingt. Die Änderung der Größe und Richtung des Kraftfeldes muß naturgemäß auch eine Veränderung der Größe der Atomabstände und der Periodizität ihrer Anordnung bedingen. Die Zunahme der radialen Interferenzlinienbreite ist eine Folge der zugeführten Energie, wodurch auch erklärt erscheint, daß sehr plastische Metalle, wie z. B. Blei, die trotz großer Formänderung zu dieser nur geringe Energiemengen benötigen, auch nur eine geringfügige Zunahme der Linienbreite zeigen. Die Kristallform der Ele-

1) F. Regler, Ztschr. f. Phys. 82. S. 337—354. 1933.

mentarzelle ist also vom Energiegehalt der einzelnen Atome abhängig, eine Veränderung der Elementarzelle kann daher nicht kontinuierlich, sondern nur quantenhaft unter dem Einfluß von Kräften erfolgen. Auf quantenhafte Veränderungen sind aber die Gesetze der klassischen Elastizitätstheorie nicht mehr anwendbar. Daß eine Temperaturerhöhung die Anordnung der Elektronen im Atom verändert, beweisen ja auch die von Veldkamp¹⁾ gefundenen Änderungen der Feinstruktur der *K*-Absorptionskanten.

Solche Veränderungen des Kristallsystems können natürlich nicht beliebig groß werden, sondern es tritt nach einem bestimmten, für jede Atomart charakteristischen Wert der Energieerhöhung eine Lösung der atomaren Bindungen, d. h. der Bruch des Metalles ein. Erfolgt die Erhöhung des atomaren Energiegehaltes durch Temperaturerhöhung, dann wird infolge der erhöhten atomaren Beweglichkeit die Lösung des Kristallverbandes entweder als Verflüssigung des Metalles oder aber als neue, den geänderten Energieverhältnissen entsprechende Phase erscheinen. Als Beispiel dafür diene die γ - und δ -Phase des Eisens. Die Erhöhung der atomaren Beweglichkeit der Atome ist auf die Zunahme der radialen Interferenzlinienbreite und daher auch auf die Veränderung des Kristallsystems ohne Einfluß, da die relativ großen Atomamplituden nicht das Aussehen der Interferenzfiguren, sondern nur die Intensität der gestreuten Strahlung beeinflussen. Vorstellungsmäßig müssen zur Erklärung dieser Tatsache in jedem Zeitmoment alle Atome eines Gitters die gleiche Bewegungsgröße und Richtung besitzen. Da die Temperaturerhöhung nicht nur eine Veränderung der Elektronenbahnen, wie etwa die Energieerhöhung auf mechanischem Wege, sondern auch noch die Erhöhung der atomaren Beweglichkeit zur Folge hat, tritt bei Erhöhung der Temperatur eines Metalles nicht nur eine Erniedrigung der Gittersymmetrie, sondern auch eine allgemeine Zunahme der Atomabstände ein, die ebenfalls als Komponente der durch die thermische Energieerhöhung bedingten Kristallgitterveränderungen angesehen werden muß.

Es wäre aber verfehlt, die Zunahme der Linienbreite mit zunehmender Temperatur als Zeichen für Kristallgitterstörungen bei dieser Temperatur anzusehen, da ja diese Atomanordnung — bei Durchführung der Versuche mit einem vollständig störungsfreien Kristallgitter — die für diesen Temperaturwert charakteristische und stabile Gitterform darstellt. Die radiale Interferenzlinienbreite kann daher überhaupt nicht allgemein als

1) J. Veldkamp, *Ztschr. f. Phys.* 82. S. 776—784. 1933.

Maß für die Größe der Kristallgitterstörungen, sondern nur als Maß für die Größe der einem Kristallgitter innewohnenden Energiemenge gelten. Nur bei gleichen Temperaturen ist die Linienverbreiterung ein Maß für die Größe der Kristallgitterstörungen. Diese Auffassung wird durch die Kurve der Fig. 8 bestätigt, bei der die radiale Interferenzlinienbreite durch die Erhöhung der Schwingungszahl bei gleicher Beanspruchung, also gleicher Spannung, eine stete Vergrößerung erfährt. Nicht die Spannung, sondern die einem Kristallgitter zugeführte Energiemenge bestimmt das Kristallgitter.

Zwischen der thermischen und der mechanischen Energiezufuhr bestehen aber dennoch prinzipielle Unterschiede. Während nämlich jede mechanische Energieerhöhung im kalten Zustand unbedingt eine Zunahme der Linienbreite ergibt und niemals zur Ausheilung des Kristallgitters führen kann, ist bei kaltverformten Metallen durch Temperaturerhöhung und langsames Erkalten ein Rückgang der Linienbreite zu erreichen. Dabei ist die durch die Temperaturerhöhung bedingte Zunahme der Linienbreite um so geringer, je höher die Ausgangslinienbreite des Metalls im kalten Zustand ist. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung darin, daß jede Abweichung von dem durch die Temperatur bedingten Kristallsystem einen Zwangszustand darstellt, bei dem die das Kristallgitter rückbildenden Gitterkräfte und die Reibungswiderstände der Kristalle im Gleichgewicht stehen. Durch die Erhöhung der Temperatur eines Metalles wird aber die atomare Beweglichkeit erhöht und die Reibungswiderstände der Kristalle dadurch entsprechend vermindert, so daß sich ein neuer Gleichgewichtszustand mit geringeren Abweichungen vom idealen Gittertypus einstellen kann. Es müssen daher auch bei Temperaturerhöhung eines Metalles mit hohen Werten für die Linienbreite nur geringere Zunahmen dieses Wertes auftreten, da der gemessene Wert als eine Resultierende aus den durch die erhöhte atomare Beweglichkeit rückgebildeten Linienbreiten und den durch die Temperaturerhöhung bedingten Zunahmen der Linienbreiten anzusehen ist. Durch diese Auffassung wird auch die Streuung der Meßpunkte in Kurve I der Fig. 8 verständlich. Eine vollständige Ausheilung des Kristallgitters durch Temperaturerhöhung kann erst bei Aufhebung der Kristallreibungskräfte, d. h. bei Erreichung des Schmelzpunktes oder nach der Umkristallisation z. B. bei Fe erfolgen. Die Kurve III der Fig. 8 bestätigt diese Anschauung.

Wie Verf. schon an anderer Stelle zeigen konnte, erfahren die Kristalle im Gebiet der elastischen Verformung

eine Verdrehung, die aber bei kurzzeitiger elastischer Verformung durch die Gitterkräfte bis auf die bei der Verdrehung ausgestrahlte Wärmemenge (elastische Hysterese) wieder rückgebildet wird. Bei langdauernder elastischer pulsierender oder schwingender Beanspruchung werden aber die jeweils bleibenden Hystereseanteile in ihrer Summe so groß, daß auch die durch elastische Spannungen bedingten Gitterstörungen bleibend werden. Bei andauernder elastischer Zug- plus Wechselbeanspruchung entstehen sogar gut ausgebildete Faserstrukturen. Die Ursache des Knickes des Kurvenzuges in Fig. 6 ist an und für sich nicht zu erklären, da die Beanspruchung nur eine Komponente der der Elementarzelle zugeführten Energiemenge darstellt und diese Komponente sich wieder auf die Reibungswiderstände der Kristalle und auf die Veränderung der Elementarzelle aufteilt. Nur eine Kurve mit der der Elementarzelle zukommenden Energiemenge als Abszisse und der Linienbreite als Ordinate könnte diese Zusammenhänge eindeutig klären. Es ist daher unmöglich, aus der Verformung der Elementarzelle auf die zur Erzielung dieser Verformung nötigen Kräfte Schlüsse zu ziehen, da der auf die Veränderung der Elektronenbahnen entfallende Energiebetrag der Gesamtenergie nicht bekannt ist. Die Veränderung des Gittertypus unter dem Einfluß von äußeren Kräften macht es auch unmöglich, aus der Vergrößerung oder Verkleinerung des Abstandes einzelner Netzebenenscharen auf eine entsprechende Veränderung des Gitterparameters zu schließen.

Aus den obigen Überlegungen läßt sich nun auch das Wesen der Härtung von reinen Metallen erklären. Während nämlich die Amplituden der Atomschwingungen sich spontan der herrschenden Temperatur anpassen, benötigt die Einstellung des Kristallsystems in den der Temperatur entsprechenden Zustand Zeit. Wird nun ein Metall, wie dies auch bei chemisch reinem Silber beobachtet wurde, von der Schmelztemperatur plötzlich abgeschreckt, so bleibt das Kristallgitter größtenteils in dem Energiezustand, den es bei der hohen Temperatur innehatte, während die Reibungskräfte zwischen den Kristallen durch die plötzliche starke Verringerung der atomaren Beweglichkeit stark zunehmen. Es entsteht somit im Innern des Metalles, dessen äußere Form durch die zuerst erstarrte Oberfläche bestimmt ist, durch die Gitterkräfte der Kristalle aufeinander ein starker Spannungsdruck, der zur Erhöhung der Reibungswiderstände und damit der Festigkeit des Metalles führt. Die hohen Werte für die Linienbreite lassen aber keine großen Energieaufnahmen mehr zu, so daß das Form-

änderungsvermögen eines gehärteten Metalles gering werden muß. Im Zustand hoher Temperaturen hingegen sind die Reibungswiderstände der Kristalle gering, es können also die gleichen Energiemengen bei geringer Kraftaufwendung durch entsprechend größere Verformungen erzielt werden. Bei plötzlicher Abkühlung von Eisen treten ähnliche Erscheinungen auf. Als Beispiel diene die gelegentlich beobachtete γ -Struktur von rasch abgeschreckten Stahlproben.

Beruhend die bis jetzt angestellten Überlegungen auf Richtigkeit, dann müssen sich die in den Lauebildern in Fig. 10 gezeigten Rekristallisationserscheinungen ebenfalls zwanglos erklären lassen. Durch den Vorgang des Kaltwalzens bekommen die Kristalle Richtungseffekte. Die Elementarzellen besitzen alle möglichen Energiezustände und gehören daher allen Übergängen des Gittertypus vom normalen Typus bis zu dem der größten Energiezufuhr entsprechenden an. Je höher nun die Temperatur der Probe wird, desto mehr werden sich die verschiedenen Energiezustände der Elementarzellen ausgleichen. Durch die annähernd gleiche Richtung der Kristalle und den gleichen Zustand der Elementarzellen werden sich die Kristalle allmählich zu größeren Kristallen zusammenschließen, was aus der Verkürzung der Asterismen in Fig. 10b hervorgeht. Wird nach Überschreiten der Schmelztemperatur der Reibungswiderstand der Kristalle sehr klein, so schließen sich die Elementarzellen zu großen, gerichteten Kristallen zusammen, wie dies aus Fig. 10c zu ersehen ist. Zur Entstehung der Rekristallisation ist also gleiche Richtung der Kristalle (Kaltverformung) und Gleichheit des Energiegehaltes der Elementarzellen (hohe Temperaturen) Voraussetzung. Wird das Metall jedoch einer raschen Abkühlung ausgesetzt, dann werden die Reibungskräfte der Kristalle sehr groß und die inneren Spannungen führen zur Zerstörung der Kristalle. Daher sind gehärtete Stähle sehr feinkörnig. Voraussetzung für die Entstehung großer Kristalle ist die Gleichheit der Elementarzellen, die aber bei abgeschreckten Metallen niemals gegeben erscheint (Fehlen der Arkelaufspaltung).

Während bei Silber und allen anderen Metallen, die ohne Änderung ihrer Phase schmelzen, schon sofort nach Erreichung der Schmelztemperatur die geschilderten Erscheinungen auftreten, ist bei Eisen und ähnlichen Metallen oberhalb des Umwandlungspunktes ein längeres Halten der Temperatur nötig, da Reibungswiderstände der Kristalle auch in der γ -Phase noch vorhanden sind und zu ihrer Überwindung Zeit benötigen.

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit konnte gezeigt werden, daß die Breite der Interferenzlinien der an einem Metall gebeugten charakteristischen Röntgenstrahlung nicht nur durch jede Art mechanischer Beanspruchung, sondern auch durch Temperaturerhöhung zunimmt. Auf Grund der durchgeführten röntgenographischen Untersuchungen (als Aufnahmeverfahren gelangte das *Kegelreflexionsverfahren* des Verf. mit ruhendem Film zur Anwendung) ist die Größe der radialen Interferenzlinienbreite als Maß für die dem Kristallgitter zukommende potentielle Energie zu werten. Jedes Kristallgitter eines Metalles (Element oder chemische Verbindung) kann nur einen bestimmten, für das untersuchte Metall charakteristischen Wert an potentieller Energie aufnehmen, dann tritt bei weiterer Energiezufuhr die Lösung der atomaren Bindungen ein. So zeigte sich bei Untersuchungen an Silberproben, daß die Interferenzlinienbreite an der Bruchstelle eines Metalles mit der beim Schmelzpunkt desselben Metalles ermittelten Linienbreite übereinstimmt.

Aus den Versuchsergebnissen wird gefolgert, daß die Verbreiterung der Interferenzlinien nicht durch eine Verbiegung der Elementarzellen entsteht, sondern auf einer Veränderung des Kristallgitters der Elementarzelle beruht. Es entspricht also jedem Energiegehalt eines Kristallgitters ein eigener Gittertypus, der durch die Veränderungen der Bindungskräfte der Atome infolge Hebung der Hüllenelektronen in energiereichere Bahnen zustande kommt. Die Veränderung des Gittertypus einer Elementarzelle muß als quantenhafter Vorgang angesehen werden, der nicht mehr den Gesetzen der klassischen Mechanik gehorcht.

Unter Zugrundelegung der ermittelten Erkenntnisse lassen sich die bekannten Metalleigenschaften der Plastizität, der Härtung und der Rekristallisation zwanglos erklären.

Herrn Assistenten Dr. Franz Lihl sei auch an dieser Stelle für seine wertvolle Mithilfe bei der Ausführung der Untersuchungen und Messungen herzlichst gedankt.

Wien VI, Versuchsanstalt für röntgentechnische Materialuntersuchungen.

(Eingegangen 7. Januar 1934)

Über die Hörsamkeit kleiner Musikräume**Von Georg v. Békésy**

(Mit 16 Figuren)

I. Meßanordnung

Zur Herstellung eines exponentiell ansteigenden und abfallenden Schalldruckes diente außer dem schon früher beschriebenen entdämpften Schwingungskreis¹⁾ die Anordnung der Fig. 1, bei der die

Gleichspannung eines über dem Widerstand R sich auf- und entladenden Kondensators C unter Zwischenschaltung eines periodischen Zerhackers an dem großen Widerstand ϱ abgegriffen wird. Nach entsprechender Verstärkung und Heraushebung der Obertöne entsteht ein reiner Ton, der nach dem Abschalten der Ladespannung des Kondensators während der Zeit

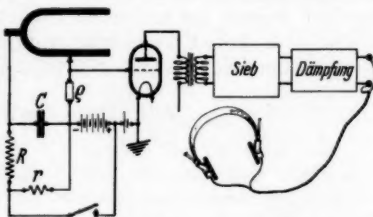


Fig. 1. Schaltung zur Herstellung langsam ein- und ausklingender Töne

$$T = 6,9 \, C R \left(1 - \frac{|R|}{2\varrho}\right)$$

auf den tausendsten Teil seiner ursprünglichen Amplitude herabsinkt, vorausgesetzt, daß $r \ll R \ll \varrho$, und daß die Öffnungs- und Schließungsdauer des Unterbrechers einander gleich sind. Als Unterbrecher diente ein Stimmgabelröhrensummer oder eine kräftig angeregte Fernhörermembran, deren Resonanzstellen bei passender Wahl der Kontaktfeder durch die zusätzliche Dämpfung stark abgeflacht werden, so daß mit ihr die Zerhackungsperiode in einem größeren Frequenzbereich geändert werden kann. Die ganze Anordnung wurde mit einem automatischen Nachhallmesser geeicht, wobei es sich

1) Ann. d. Phys. [5] 16. S. 844. 1933.

zeigte, daß für kurze Ausgleichvorgänge stets ein Glimmerkondensator verwendet werden muß, da sonst wegen der dielektrischen Nachwirkung kein exponentieller Schalldruckabfall eintritt. Als Fernhörer diente ein Kondensatorfernhörer und ein elektrodynamischer Fernhörer von Siemens & Halske.

Zur Bestimmung der Nachhallzeit der Räume diente eine automatische Anordnung, bei der sich nach Abschalten der im Raume befindlichen Schallquelle eine Uhr in Tätigkeit setzt und so lange läuft, bis der Schalldruck auf einen gewissen vorher eingestellten Wert herabgesunken ist. Ändert man die Einstellung der Anordnung derart, daß die Uhr bei einem anderen ebenfalls bekannten Schalldruck aussetzt und wiederholt die Messung, so kann man die zu einem gewissen Schalldruckabfall gehörige Zeitdifferenz ermitteln¹⁾ und daraus die Nachhallzeit T , d. h. die Zeit, innerhalb der der Schalldruck auf den tausendsten Teil herabsinkt, bestimmen. Die Messungen wurden immer an mehreren Stellen des Raumes wiederholt, wobei sich bei Verwendung von Heultönen mit $\pm 7\%$ iger Frequenzmodulation gut reproduzierbare Mittelwerte ergaben.

II. Über den Anhall

In Räumen mit geringer Dämpfung kann man beobachten, daß bei gleicher Nachhalldauer der Anhall eines Geräusches bedeutend kürzer ist als derjenige eines reinen Tones. Geht man von den bekannten energetischen Betrachtungen aus²⁾, so ergeben sich für die mittlere Schallenergiedichte des Raumes E bei einem plötzlichen Ein- und Ausschalten einer konstanten Schallquelle ein zeitlicher Anstieg und Abfall gemäß der Gleichung:

$$E = E_0 (1 - e^{-\text{const} \cdot t}) \quad \text{und} \quad E = E_0 e^{-\text{const} \cdot t},$$

wenn t die Zeit darstellt. Bei der Addition ergänzen sich die beiden Kurven zu einem konstanten Betrag. Für den Schalldruck, der durch Wurzelbildung aus der Energiedichte erhalten wird, trifft dies nicht mehr zu, da durch die Wurzelbildung die Ausschwingzeit verdoppelt wird, während sich der Einschwingvorgang bedeutend verkürzt. Diese Verkürzung des Einschwingvorganges gegenüber dem Ausschwingvorgang zeigt in Fig. 2, Bild 1, die oszillographische Aufnahme des Schall-

1) M. J. O. Strutt, *Raumakustik*, Handb. d. exper. Physik von Wien und Harms, Bd. 17, 2. Teil.

2) E. Waetzmann, *Müller-Pouillet's Lehrb. d. Physik*, Akustikband. S. 456. 1929.

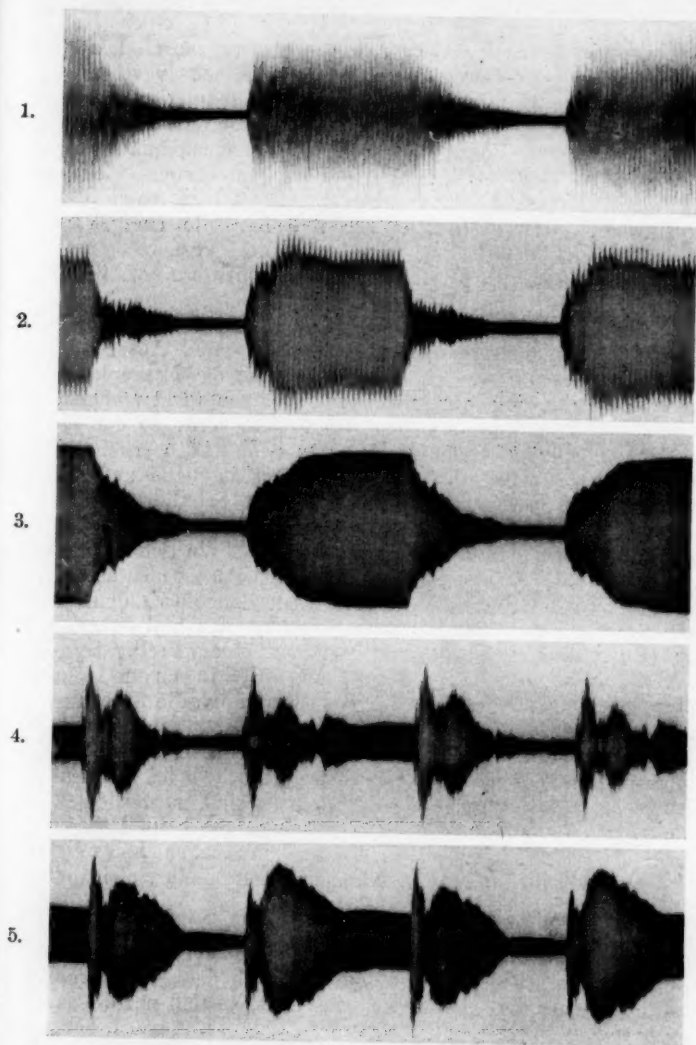


Fig. 2. Bei Heultönen und Schallquellen mit sehr raschen Frequenz- und Phasenänderungen ist der Einschwingvorgang kürzer als der Ausschwingvorgang, während bei Tönen die Ein- und Ausschwingzeiten einander gleich sind. Raumvolumen 180 m³, Dauer der Schallimpulse 1,6 Sek.

druckes für einen Heulton von 1000 Hz bei einer Heulfrequenz von 20 Hz und einer $\pm 10\%$ igen Frequenzmodulation. Doch erhält man diese Verkürzung des Einschwingvorganges außer bei Heultönen mit großer Frequenzmodulation nur bei einer unregelmäßigen Knallfolge und bei Geräuschen. Denn bereits bei einer Verminderung der Frequenzmodulation des obigen Heultones auf $\pm 2,5\%$ unterscheidet sich, wie das 2. Bild zeigt, der Einschwingvorgang der Länge nach kaum von dem Ausschwingvorgang, so daß hier die energetische Ableitung der Ausgleichformeln wegen der Vernachlässigung der Phasenverhältnisse nicht mehr zutrifft, worauf bereits M. J. O. Strutt hingewiesen hat.¹⁾

Für einen reinen Ton zeigt das 3. Bild für den Schalldruck die vollkommene Gleichheit der Ein- und Ausschwingzeit. Bringt man wie bei dieser Aufnahme das Mikrophon in eine Raumecke, die durch die zueinander senkrecht stehenden Zimmerwände und den Fußboden gebildet wird, so daß sich das Mikrophon in einem Druckknoten befindet, so erhält man bei einer Abstimmung der Frequenz der Tonquelle auf einen Eigenton des Raumes fast exponentiellen Schalldruckanstieg und Abfall.²⁾ Denn besonders bei geringer Dämpfung des Raumes ist die Resonanz derart scharf, daß die Schwingungsamplitude des resonierenden Eigentones ganz bedeutend die Schwingungsamplitude der nebenan liegenden, durch den Ausgleichvorgang angestoßenen Eigentöne übertrifft und daher der ganze Raum ähnlich wie ein System mit einem Freiheitsgrade wirkt. Befindet sich das Mikrophon nicht in einem Druckknoten des eingeschwungenen Tones oder stimmt die Erregungsfrequenz nicht mit der Eigenfrequenz des Raumes überein, so überwiegen an Schallstärke die Stoßschwingungen der nebenan liegenden Eigenfrequenzen, da diese jedoch beim Ein- und Ausschalten der Schallquelle die gleichen sind, so werden, wie die 4. und 5. Aufnahme der Fig. 2 zeigen, die beim Ein- und Ausschalten entstehenden Schalldruckänderungen bis in die feinsten Einzelheiten während längerer Zeit hindurch einander gleich.

Setzt der Ton, ähnlich wie bei einem Musikinstrument, nicht plötzlich ein oder aus, sondern besitzt er eine gewisse Ein- und Ausschwingzeit, so wird dadurch das Fourieramplitudenspektrum der Tonimpulse eingeengt, so daß nur die ganz

1) M. J. O. Strutt, Phil. Mag. 8. S. 236. 1929.

2) Vern. O. Knudsen, Journ. Ac. Soc. Amer. Vol. IV. No. 1. S. 20. 1932.

eng beieinanderliegenden Eigenschwingungen des Raumes erregt werden. Wegen ihres geringen Frequenzunterschiedes treten daher nur ganz langsame Schwebungen auf, so daß die starken Zacken der Ein- und Ausschwingkurven sich glätten. Fig. 3 zeigt dies für eine Nachhallzeit von 3,0 Sek., bei der in der obersten Aufnahme der Ton plötzlich ein- und aus-

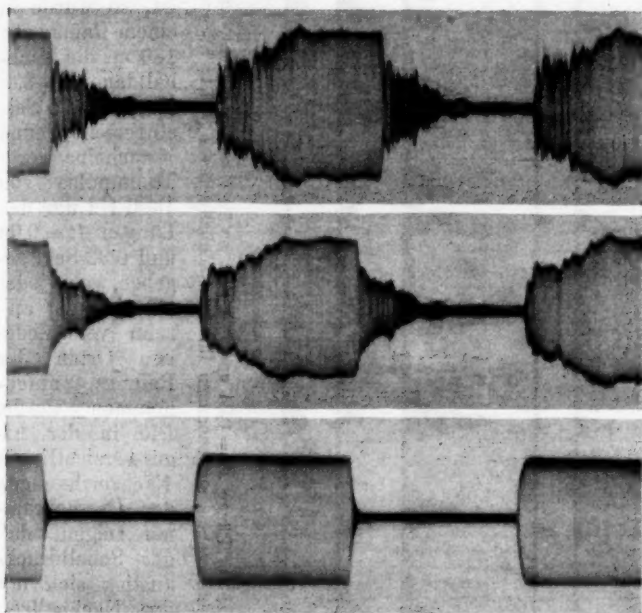


Fig. 3. Die Ausgleichkurven glätten sich, wenn der Ton nicht plötzlich ein- und aussetzt

geschaltet wurde, während in der mittleren Aufnahme mit Hilfe der Schaltung in der Fig. 1 der Ton, wie die unterste Aufnahme zeigt, mit einer Nachhallzeit von $T = 0,2$ Sek. ein- und aussetzte. Da die beiden ersten Aufnahmen sonst einen wesentlich gleichen Amplitudenverlauf zeigen, so folgt, daß die oft auftretenden starken Abweichungen von dem exponentiellen Schalldruckabfall zum größten Teil durch die Schwebungen der nahe beieinanderliegenden Eigenfrequenzen entstehen.

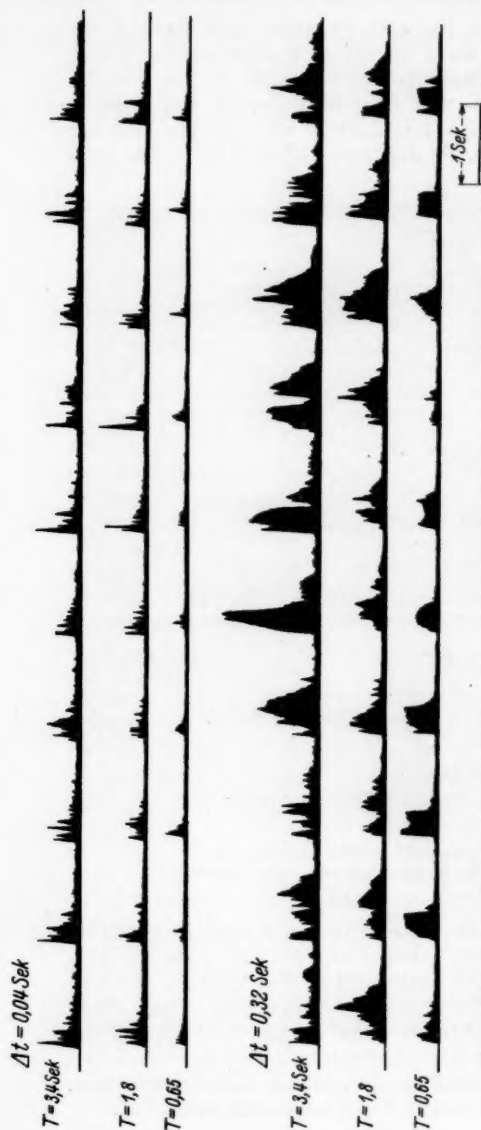


Fig. 4. Die durch Tonimpulse der Länge $\Delta t = 0,04$ und $0,32 \text{ Sek.}$ an 10 verschiedenen Stellen des Raumes entstehenden Schalldruckänderungen, aufgenommen für die Nachhallzeiten $T = 3,4$; $1,8$ und $0,65 \text{ Sek.}$

Da bei diesem Sachverhalt über den Einfluß der Raumdämpfung auf die Anhalldauer schwer etwas auszusagen ist, so wurde in einem Raume von 180 m^3 die Nachhalldauer $T = 3,4$; $1,8$ und $0,65 \text{ Sek.}$ eingestellt und nacheinander Tonimpulse von 1600 Hz und den Längen $\Delta t = 0,04$ und $0,32 \text{ Sek.}$ gegeben, wobei jeder Tonimpuls an zehn verschiedenen Orten des Raumes aufgenommen wurde. Die in der Figur 4 ersichtlichen Nachzeichnungen der Oszillogramme zeigen, daß der Schalldruckanstieg sich mit der Nachhallzeit des Raumes wenig ändert, besonders im Vergleich mit dem zugehörigen Ausschwingvorgang. Auch zeigt es sich, daß das mittlere Schallstärkenverhältnis zwischen einem Tonimpuls von $0,04$ und

0,32 Sek. Dauer nur wenig durch die Nachhallzeit des Raumes beeinflusst wird.

Diesem gegenüber dem exponentiellen Verlauf stark verkürzten Schallstärkenanstieg des Anhalles ist es zu verdanken,

Beethoven, 5. Symphonie 1. Violine

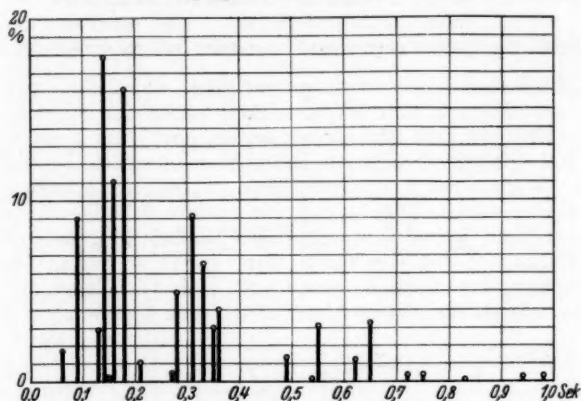


Fig. 5. Häufigkeit der verschiedenen Tonlängen für Violine

daß selbst bei einer Nachhallzeit von $T = 3,5$ Sek. im obigen Raume noch eine Tonfolge, deren Frequenz von 1000 Hz beginnend, in gleichen Zeitabständen immer um einen halben Ton erhöht wurde, um bei 2000 Hz ausgeschaltet zu werden, sogar bei einer nur 0,03 Sek. langen Dauer der einzelnen Töne noch den treppenförmigen Anstieg der Tonhöhe erkennen ließ und erst bei einer weiteren Ver-

Beethoven, 5. Symphonie 1. Violine

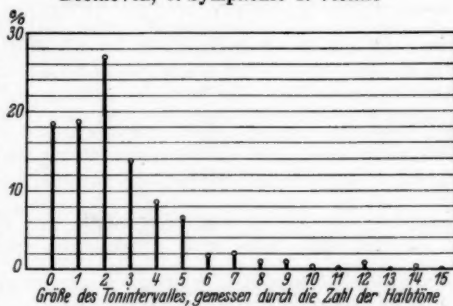


Fig. 6. Häufigkeit der Tonhöhenintervalle für Violine

kürzung der Zeitabstände in einen kontinuierlichen Heulton überging. Eine Verminderung der Nachhalldauer des Raumes

auf 0,65 Sek. bewirkte keine merkliche Änderung der Zeitabstände, bei denen der Übergang zum Heulton erfolgte. Auch für einen Raum von 2000 m^3 und $T = 2,0$ Sek. ergaben sich die gleichen Verhältnisse. Die Figg. 5 und 6 zeigen, daß in der Musik die am häufigsten vorkommenden Tondauern und Tonintervalle bedeutend größere Werte besitzen.

III. Über die Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit

Wiederholte Beobachtungen zeigten, daß Zelte, wie sie bei Ausstellungen und Wanderzirkus verwendet werden, oft eine auffallend gute Akustik aufweisen, noch besser als es bei mit Holztäfelung versehenen Räumen gelegentlich beobachtet wird. Während bei den mit Holz bekleideten Räumen angenommen werden konnte, daß die größere Schallgeschwindigkeit im Holz irgendeinen günstigen Einfluß hat, so war bei den Zeltstoffen von vornherein klar, daß hier nur die starke Absorption der tieferen Frequenzen im Verhältnis zu den hohen, wie sie bei dieser Absorption durch Membranbewegung

immer eintritt, der Grund für die Güte der Raumakustik sein kann. Für die Holzbekleidung wurde von E. Meyer und Lothar Cremer¹⁾ inzwischen nachgewiesen, daß auch hier der günstige Einfluß auf eine zweckmäßige Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit zurückzuführen ist.²⁾

Für die Bedeutung der Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit spricht z. B., daß das Ein- und Ausschalten zweier Töne mit den

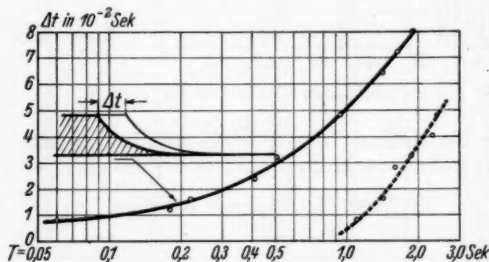


Fig. 7. Klingen zwei Töne mit der gleichen Ausschwingzeit T ab, so kann der Abklingvorgang um die Zeit Δt gegenüber dem anderen verschoben werden, ohne daß eine Klangfarbenänderung gegenüber dem gleichzeitigen Abklingen erfolgt

1) Erwin Meyer u. Lothar Cremer, *Ztschr. f. techn. Physik* 14. S. 500. 1933.

2) Theoretische Erwägungen über die günstigste Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit bei: E. C. Wente, *Amer. Arch.* (August 20, 1928); W. A. MacNair, *Journ. Acous. Soc.* 1. S. 242. 1930; Vern. O. Knudsen, *Architectural Acoustics*, New York, 1932, S. 406; M. J. O. Strutt, *Wien-Harms, Handb. d. exp. Physik, Technische Akustik, I. Teil*, S. 476. 1934.

Frequenzen 1000 und 400 Hz und je 60 Phon Lautstärke¹⁾ bereits eine merkliche Klangfarbenänderung ergibt, wenn die beiden Töne nicht gleichzeitig, sondern mit einer Zeitdifferenz von $2 \cdot 10^{-3}$ Sek. ein- oder ausgeschaltet werden, wobei die Reihenfolge der beiden Töne gleichgültig ist. Klingen die beiden Töne mit der gleichen Ausschwingzeit T ab, die in der Abszisse der Fig. 7 dargestellt ist, so ist die in der Ordinate angegebene Zeitdifferenz notwendig, um gegenüber dem gleichzeitigen Abklingen eine Klangfarbenänderung zu erhalten. Die punktierte Kurve gilt für den Einschwingvorgang.

Die Ordinate der Fig. 8 gibt an, um wieviel die Ausschwingzeit T eines der beiden Töne geändert werden muß, damit beim gleichzeitigen Beginn der beiden Ein- und Ausschwingvorgänge eine Klangfarbenänderung entsteht gegenüber dem Fall, wo beide Töne die gleiche Ein- oder Ausschwingzeit besaßen. Die erhaltenen Ausgleichzeitänderungen sind größer als diejenigen, die notwendig sind, um bei einem einzigen Ton eine Änderung des Ausgleichvorganges wahrzunehmen.²⁾ Die erstere Unterschiedsschwelle gilt nämlich für eine Klangfarbenänderung, während die letztere eher einer Zeitempfindung entspricht.

Die oft vorkommende übermäßig starke Raumdämpfung der hohen Frequenzen ist außerdem deshalb nicht günstig, weil viele Musikinstrumente, besonders bei den hohen Tönen,

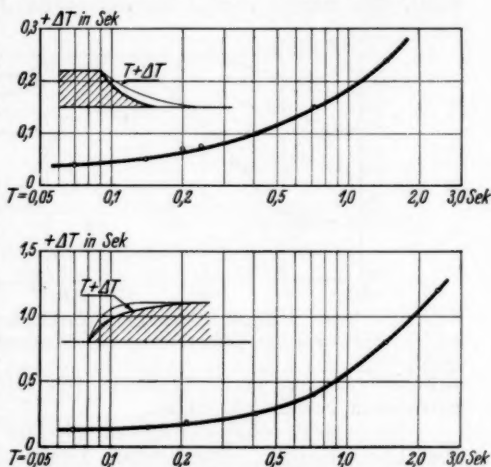


Fig. 8. Bei zwei gleichzeitig und gleichartig ein- und ausschwingenden Tönen entsteht eine Klangfarbenänderung, wenn die Ein- oder Ausschwingzeit des einen Tones um ΔT vergrößert wird

1) Erwin Meyer in Wien-Harms, Handb. d. exper. Physik 17. 2. Teil. S. 76. 1934.

2) Ann. d. Phys. [5] 16. S. 851 u. 853. 1933.

eine starke Richtwirkung der Schallabstrahlung zeigen, so daß sich die Schallenergie durch wiederholte Reflexion an den Wänden nicht genügend gleichmäßig auf den Raum verteilen kann. Diesbezügliche Messungen zeigt die Fig. 9, wo die Kurve $T=0$, die im Freien aufgenommene Richtwirkung der Strahlung eines Lautsprechers für einen Heulton von 2000 Hz zeigt, wobei die Ordinate die Schalldruckänderung angibt, die bei einer Drehung des Lautsprechers aus der Mittelebene entsteht. Die beiden oberen Kurven geben die gleichen Schall-

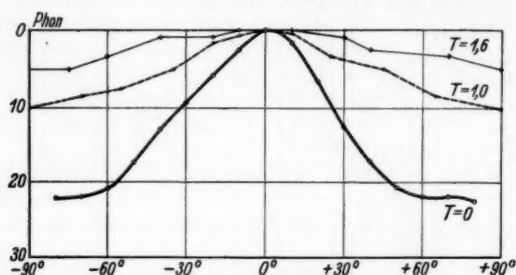


Fig. 9. Einfluß der Nachhallzeit auf die Richtwirkung eines Lautsprechers

druckänderungen in einem Raum von 1100 m³ und den eingetragenen Nachhallzeiten an.

Die beim gewöhnlichen Hören bei einer Richtungsänderung des Lautsprechers entstehenden Lautstärkeänderungen sind meist größer als sie den mit dem Mikrophon aufgenommenen Schalldruckänderungen entsprechen, da durch die Konzentration auf den Lautsprecher eine gewisse Unterdrückung des Nachhallschallfeldes eintritt. Der Unterschied schwankt zwischen 2 und 7 Phon.

Um den Einfluß der Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit auf die Güte eines Raumes zu untersuchen, wurde ein Absorptionsstoff hergestellt, der den Verhältnissen in einem Zelte gleicht. Er bestand aus einem Holzrahmen von 2 × 4 m, der Länge nach in der Mitte unterteilt, auf dessen einer Seite ein Drahtgeflecht kam, während auf der anderen Seite, der Einfallsrichtung des Schalles, ein Zeltstoff in 1 × 4 m-Flächen ausgespannt wurde. Dieser Stoff hatte ein Gewicht von 350 g/m² und wurde so appretiert, daß er in der Hauptsache beim Auftreffen der Schallwellen membranförmige Bewegungen ausführte, wodurch besonders die tiefen Frequenzen verschluckt werden. Damit keine Resonanzstellen auftreten, wurde der

zwischen dem Drahtgeflecht und dem Zeltstoff liegende Zwischenraum von 4 cm Breite mit ganz loser Baumwollwatte gefüllt, 1,3 kg/m². Die Frequenzabhängigkeit der Schluckzahl, mit der Nachhallmethode gemessen, zeigt die Fig. 10. Durch Verstärkung der Appretur des Zeltstoffes kann die Schluckzahl der hohen Frequenzen noch weiter gegenüber derjenigen der tieferen Frequenzen vermindert werden, doch erwies sich obiges Verhältnis am wirtschaftlichsten. Holz, Watte und Stoff waren gegen Feuer imprägniert. Dreht man die Stoffplatte um, so daß

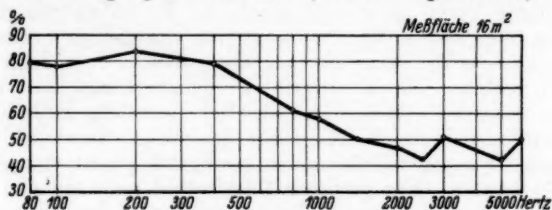


Fig. 10. Frequenzabhängigkeit der Schluckzahl für eine Stoff-Watte-Kombination

der Schall zuerst auf die Watteschicht auffällt, so erhöht sich die Schluckzahl für die höheren Frequenzen, ohne daß die der tiefen Frequenzen sich dabei ändert. Durch Umdrehen dieser Platten hat man es daher in der Hand, auch den Frequenzgang der Nachhallzeit zu beeinflussen.

IV. Über die optimale Nachhalldauer

Zur Einstellung der optimalen Nachhalldauer wurden ähnlich, wie bereits W. Sabin und S. Lifschitz¹⁾ ausführten, nacheinander mehr oder weniger Absorptionsstoff in den Raum gebracht und dieser möglichst gleichmäßig auf die Decke und Wände des Raumes verteilt. Es standen hierzu mehrere hundert Quadratmeter der obigen Stoffplatten zur Verfügung, außerdem Holzrahmen, lediglich mit Watte zwischen zwei Drahtnetzen gefüllt, die, in einer gewissen Entfernung von der Wand aufgestellt, eine mit der Frequenz gleichmäßig ansteigende Schluckzahl aufwiesen, ferner noch ein dünner Samtstoff, der sozusagen nur die Frequenzen über 1000 Hz dämpfte, wenn er unmittelbar auf die Wand oder den Boden aufgelegt wurde. Als Beobachter nahmen teil Musikpädagogen, Konzertbesucher, Funkbastler und mehrere namhafte Künstler und Mitglieder der hiesigen

1) S. Lifschitz, Phys. Rev. **25**. S. 391. 1926; **27**. S. 618. 1926; Journ. acoust. Soc. of America **4**. S. 112. 1932.

Musikakademie. Um eine gegenseitige Beeinflussung auszuschließen, wurde von jeder einzelnen Versuchsperson gesondert die optimale Nachhallzeit eingestellt. Zuerst wurde ein vollständig ungedämpfter Raum und darauf ein übermäßig abgedämpfter Raum vorgeführt, damit die Versuchspersonen zunächst einmal die zu beobachtenden Erscheinungen kennen, lernen konnten. Hierauf wurde schrittweise, immer von einem übermäßig hallenden, zu einem übermäßig gedämpften Raume gehend, versucht, jene Nachhallzeit einzustellen, die eben weder zu hallend noch zu stumpf erschien. Es ist unbedingt notwendig, den besten Wert sprungweise von beiden Seiten her einzugrenzen, da man nur auf diese Weise reproduzierbare Werte erhält. Die günstigste Frequenzabhängigkeit wurde ebenso eingestellt, indem abwechselnd übermäßig helle Klangfarbe mit zu dumpfer Klangfarbe gewechselt wurde, bis die optimale Frequenzabhängigkeit genügend genau eingegrenzt werden konnte. Ein größerer Unterschied zwischen den Einstellungen der einzelnen, sehr verschiedenen Beobachter trat nicht auf. Die anerkannten Musiker unterscheiden sich nur dadurch von den Nichtmusikern, daß ihre Angaben meist viel bestimmter und eindeutiger waren.

Als Beispiel zeigen die Figg. 11 und 12 für einen Raum von 180 m^3 die von einem Funkliebhaber und einem Musikästheten

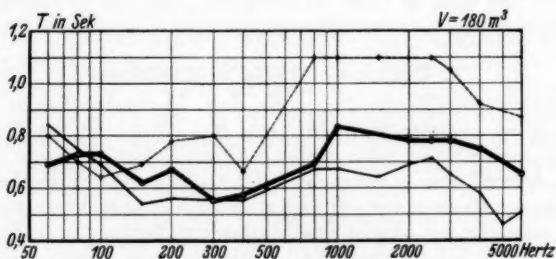


Fig. 11. Günstigste Nachhalldauer für einen Raum von 180 m^3 und Piano

für Piano eingestellten günstigsten Nachhallzeiten, die durch die stark ausgezogenen Kurven dargestellt sind. Die punktierten Kurven entsprechen einer Einstellung, die bereits als zu nachhallend und zu schrill empfunden wurde, während die dünn ausgezogenen Kurven einer bereits zu dumpfen und zu kurzen Einstellung entsprechen.

Fig. 13 gibt die Werte für einen Flügel in einem Raume von 400 m^3 an, wobei die Einstellungen von einem namhaften Dirigenten vorgenommen wurden und die beiden dünnen Kurven eine etwas zu dumpfe Klangfarbe aufweisen.

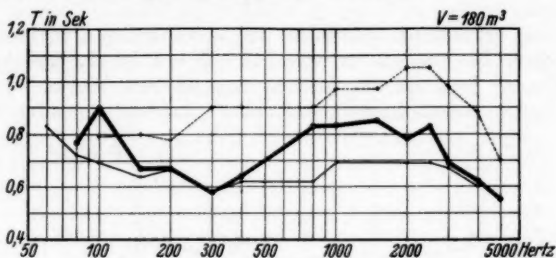


Fig. 12. Günstigste Nachhalldauer für einen Raum von 180 m^3 und Pianino

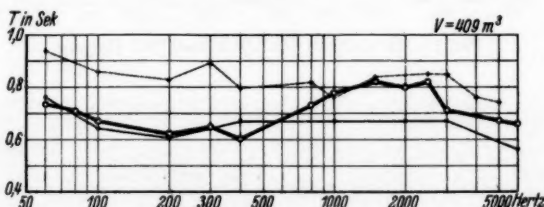


Fig. 13. Günstigste Nachhalldauer für einen Raum von 400 m^3 und Flügel

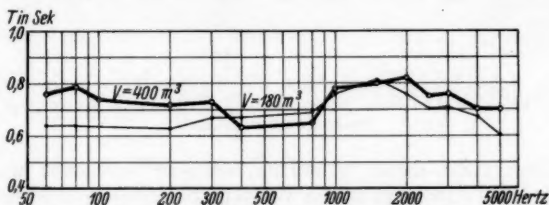


Fig. 14. Günstigste Nachhalldauer für ein Streichquartett in zwei verschieden großen Räumen

Fig. 14 und 15 geben die günstigste Nachhalldauer und ihre Frequenzabhängigkeit für ein Streichquartett und Gesang wieder. Gespielt wurde durchweg sogenannte schwere Musik.

In den obigen kleinen Räumen, wo die Entfernung zwischen der Schallquelle und dem Hörer verhältnismäßig klein ist, besteht zwischen der von dem Spieler selbst und einem ent-

ferneren Zuhörer eingestellten günstigsten Nachhalldauer kein größerer Unterschied, während in einem größeren Raume, wo die Schallstärke bei dem Zuhörer meist kleiner ist als bei dem Spieler, der entferntere Zuhörer eine größere Nachhallzeit fordert.

Die erhaltenen optimalen, im wesentlichen frequenzunabhängigen, Nachhallzeiten von etwa $T = 0,7$ Sek. sind kleiner als die bis jetzt im allgemeinen angegebenen Werte, was zum Teil auch davon herkommen kann, daß die meisten Nach-

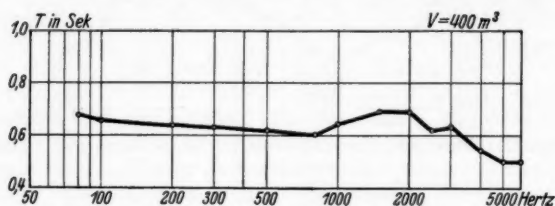


Fig. 15. Günstigste Nachhalldauer für Gesang

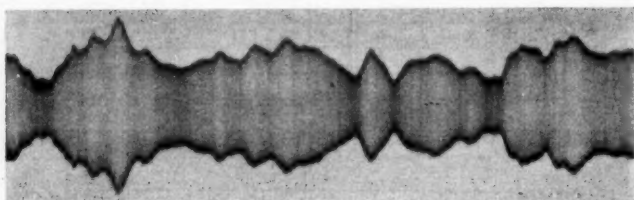


Fig. 16. Schalldruckschwankungen, die in einem bis auf die Nachhalldauer von $T = 0,65$ Sek. gedämpften Raume durch Bewegung eines Beobachters entstehen

hallzeiten nicht direkt gemessen, sondern errechnet wurden. Daß jedoch selbst ein Raum von 0,65 Sek. Nachhalldauer noch lange nicht „tot“ ist und daher das direkt von der Schallquelle kommende Schallfeld von dem durch wiederholte Reflexionen entstehenden Nachhallschallfeld beeinflusst wird, zeigt die Fig. 16, die für einen Ton von 1600 Hz in dem Raum von 180 m^3 die Schalldruckänderungen darstellt, die entstehen, wenn ein Beobachter in der einen Ecke des Zimmers sich bewegt, während der Lautsprecher und das den Schalldruck registrierende Mikrophon in der Nähe der gegenüberliegenden Wand aufgestellt sind.

Zusammenfassung

Nach Beschreibung einer Anordnung zur Herstellung langsamer exponentiell ein- und ausschwingender Töne wird das Verhältnis zwischen Anhallzeit und Nachhallzeit in kleinen Musikräumen untersucht, wobei sich ein Unterschied zwischen Geräuschen und Tönen ergibt. Um die Bedeutung der Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit für die Güte eines Musikraumes zu untersuchen, wird ein Absorptionsstoff hergestellt, der auf beiden Seiten eine andere Frequenzabhängigkeit der Schluckzahl aufweist, so daß durch Umdrehen des Absorptionsstoffes die Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit eines Raumes leicht geändert werden kann. Mit diesem Absorptionsstoff wird nun nicht nur die günstigste Nachhalldauer, sondern auch ihre günstigste Frequenzabhängigkeit bei zwei kleinen Musikräumen bestimmt.

Budapest, Kgl. ung. telegraphentechnisches Versuchsamts.

(Eingegangen 7. Februar 1934)

Berichtigung

zu der Arbeit „Über den paramagnetischen Faradayeffekt an Alaunen“ Ann. d. Phys. [5] 18. S. 251. 1933 von H. Kaufmann.

In der Tabelle 1, Seite 257 ist in der Zeile „Drehung (doppelt) in Min.“ das „doppelt“ zu streichen.

(Eingegangen 24. Februar 1934)

**Die Erholung des elektrischen Widerstandes
und der Härte von der Kaltbearbeitung
beim Zink, Magnesium und anderen
leichtschmelzenden Metallen**

Von G. Tammann und K. L. Dreyer

(Mit 7 Figuren)

Beim Zink (Schmelzpunkt 419°) und erst recht bei den noch tiefer schmelzenden Metallen tritt die Erholung von der Kaltbearbeitung schon unter 20° ein. Durch Recken, Walzen und Ziehen bei Raumtemperatur kann man daher diese Metalle nicht dauernd in den harten Zustand überführen. Um diese Überführung zu erzwingen, müßte man die plastische Verformung bei tieferen Temperaturen, bei etwa -80° , vornehmen und die hart gewordenen Proben sukzessive erwärmen, um die Temperaturintervalle der Erholung ihrer Eigenschaften zu bestimmen. Das Walzen und Drahtziehen ist aber bei tiefen Temperaturen schwierig auszuführen und wird durch das Sprödwerden der Proben noch erheblich erschwert. Erst recht ist es nicht möglich, während des Ziehens die Widerstandszunahme von Drähten zu bestimmen.

Daher wurde versucht, die Widerstandsänderung beim Tordieren von weich gewordenen Drähten zu messen. Am besten eignet sich hierzu das Zink, da sein Erholungsintervall relativ hoch, zwischen 0° und 20° liegt. Auch für die noch tiefer als Zink schmelzenden Metalle sind solche Bestimmungen ausführbar.

Die Bestimmung der Härte durch Messung der Durchmesser von Kugeleindrücken auf Walzstreifen stößt vor allem auf die Schwierigkeit, die Walze auf eine Temperatur zu bringen, bei der die Härtung eine dauernde ist.

**1. Die Erholung des elektrischen Widerstandes
vom Tordieren beim Zink**

Zwei gleiche, weiche Drähte aus demselben Zink („Kahlbaum“) von etwa 50 cm Länge waren in einem Ölbad ein-

ander parallel gespannt und lagen in einer Wheatstone-schen Brückenschaltung. Der eine der beiden Drähte war mit einer Drehscheibe verbunden und konnte tordiert werden, eine Drehung um 360° wird im folgenden als eine Torsion bezeichnet. Nach etwa 10 Torsionen wurde das Verhältnis der

Widerstände $\frac{W_{\text{tord.}}}{W_{\text{weich}}}$ bestimmt, woraus sich

$$\frac{W_{\text{tord.}} - W_{\text{weich}}}{W_{\text{weich}}} \cdot 100 = \frac{\Delta W}{W} \cdot 100$$

ergab. Während der Torsion verlängerte sich der Draht, auch hierdurch wurde sein Widerstand erhöht, und zwar war die Verlängerung bei höheren Torsionszahlen größer als bei kleinen und bei dünnen Drähten größer als bei dickeren. Die Verlängerungen wurden gemessen, ihr Einfluß auf den Widerstand berechnet und von der Gesamtänderung des Widerstandes abgezogen. Diese Korrektur überstieg selten $0,4\%$, während der Fehler der Widerstandsbestimmung $0,2\%$ nicht überstieg.

Beim Tordieren eines weichen Zn-Drahtes von $0,5$ mm Dicke und 50 cm Länge änderte sich bei 15° der Widerstand während der ersten 10 Torsionen nicht, dann wuchs er bis 80 Torsionen linear um $2,8\%$, bei weiteren 60 Torsionen verlangsamt und unregelmäßig bis etwa 4% . Die durch die Längenänderung des Drahtes bedingte Widerstandserhöhung betrug nach 140 Torsionen etwa $1,4\%$, so daß $2,6\%$ auf die Widerstandserhöhung durch Torsion entfallen. Bei 55° wirkten die ersten 70 Torsionen auf den Widerstand nicht merklich ein. Bei weiteren 70 Torsionen wuchs der Widerstand um $0,8\%$, entsprechend der Längenzunahme des Drahtes. Bei 55° erholt sich also der Widerstand von der Torsion während ihrer Ausführung, 70 Torsionen wurden in 3 Min. ausgeführt. Bei 15° bleibt aber während dieser Zeit noch ein merklicher Einfluß auf den Widerstand zurück.

Um die Erholung des Widerstandes von der Kaltbearbeitung durch Tordieren zu verfolgen, wurden weiche Zn-Drähte (50 cm Länge, $0,5$ mm Dicke) bei verschiedenen Temperaturen 75 mal in 3 Min. tordiert und bei derselben Temperatur der Widerstand des tordierten Drahtes mit dem des nicht tordierten nach verschiedenen Zeiten (1–60 Min.) verglichen. Fig. 1 gibt die Resultate bis 30 Min. wieder (von 30–60 Min. änderte sich der Widerstand nicht merklich). Bei -8° ändert sich die durch Torsion bewirkte Widerstandserhöhung in 30 Min. nicht. Mit wachsender Temperatur sinkt sie ab, und zwar um so schneller, je höher die Temperatur ist, und bei 55°

erhöht die Torsion den Widerstand nicht mehr, die Erholung von der Kaltbearbeitung durch Torsion vollzieht sich bei 55° also schon während der Ausführung der Torsion.

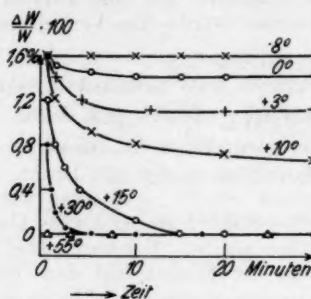


Fig. 1.
Erholung des Widerstandes von Zn

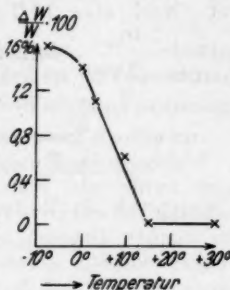


Fig. 2.

In Fig. 2 sind die nach 60 Min. erreichten $\frac{\Delta W}{W} \cdot 100$ -Werte in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Unterhalb -8° ist die Erholung von der Torsion nicht merklich, über $+15^\circ$ ist sie in wenigen Minuten beendet.

Eine ganz ähnliche Erholungskurve des Widerstandes ergab sich nach Ausführung von je 50 Torsionen in 2 Min. Auch auf dieser Kurve lag das Erholungsintervall zwischen -8° und $+15^\circ$ und der Wendepunkt bei $+5^\circ$.

2. Die Erholung des elektrischen Widerstandes vom Tordieren beim Tl, Pb, Sn und Cd („Kahlbaum“)

Für diese Metalle wurden nach 50 Torsionen in 2 Min. die Änderungen von $\frac{\Delta W}{W} \cdot 100$ bei den Temperaturen von -15° bis $+20^\circ$ in Abhängigkeit von der Zeit verfolgt. Man erhält auf diese Weise Isothermen wie die der Fig. 1 für Zn. Aus diesen kann man die Zeiten ermitteln, nach denen der durch die Torsion erhöhte Widerstand sich vollständig erholt hat. Diese Zeiten z gibt Fig. 3 in Abhängigkeit von der Temperatur wieder. Der Fig. 3 kann man für eine Reihe von Temperaturen die Zeiten entnehmen, nach denen die Erholung vollständig geworden ist. Mit abnehmender Temperatur wachsen diese Zahlen schnell an.

Da das Temperaturgebiet, in dem der Widerstand nach der Torsion sich mit der Zeit nicht ändert, unter -15° liegt,

und da unterhalb -15° die Drähte schon nach wenigen Torsionen rissen, so konnten vollständige Erholungskurven, $\frac{\Delta W}{W} \cdot 100 = f(t)$, für Tl, Pb, Sn und Cd, wie die der Fig. 2 für Zn, nicht bestimmt werden. Aus Fig. 3 kann man die Temperaturen ablesen, bei denen die Erholung schon während der Torsion erfolgte ($\varepsilon = 0$), sie betragen für Pb, Sn und Cd etwa 20° , für Tl etwa $+10^{\circ}$.

Bei einer Versuchsreihe mit einer größeren Zahl von Torsionen (75) ergab sich, daß die Zeiten der vollständigen Erholung etwas größer waren als die nach 50 Torsionen. Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, daß die größere Torsionszahl auch eine stärkere Erhöhung des Widerstandes bedingt.

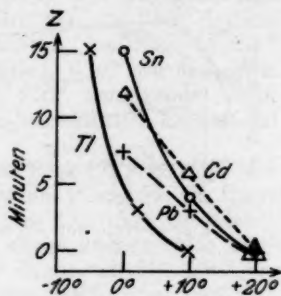


Fig. 3. Erholung des Widerstandes von Tl, Pb, Sn, Cd

3. Die Erholung der Eindruckhärte des Zinks

Während mit wachsendem Walzgrade die Durchmesser der Kugeleindrücke in der Regel abnehmen, die Härte also wächst, gilt es beim Zink nur für Walzgrade bis etwa 33% , bei höheren Walzgraden nimmt die durch das Walzen erzeugte Härtesteigerung ab. Gewalzt wurde bei 0° , und auch die Kugeleindrücke wurden bei 0° ausgeführt. Dieser Befund stimmt mit den Ergebnissen von R. Chadwick¹⁾ überein, der bei 15° Elektrolytzink walzte und bei dieser Temperatur seine Eindruckhärte bestimmte.

In Fig. 4 sind für bei 0° gewalzte und gehaltene Zn-Streifen verschiedenen Walzgrades die Durchmesser der Kugeleindrücke in Abhängigkeit von der Zeit wiedergegeben. (Kugeldurchmesser 2,37 mm, Last 20 kg, Dauer der Belastung 30 Sek.) Beim Walzgrade von 33% wächst die Härte nach dem Walzen noch merklich an, aber mit wachsendem Walzgrade verschwindet diese Erscheinung. Der Abfall der Härte mit der Zeit ist bei 0° sehr gering. Nach dem Erwärmen der Walzstreifen auf 15° wird er deutlicher (Fig. 5).

Außerdem wurden die bei 0° gewalzten und gehaltenen Zn-Streifen 4 Std. lang auf Temperaturen zwischen 0° und

1) R. Chadwick, J. Inst. Metals 51. S. 93. 1933.

100° erhitzt und nach dem Abkühlen auf ihnen Kugeldrücke bei 0° erzeugt. Die Durchmesser dieser Kugeldrücke sind in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur in Fig. 6 dargestellt.

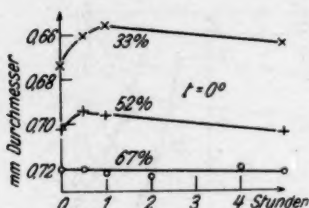


Fig. 4. Härteisothermen von Zn bei 0°

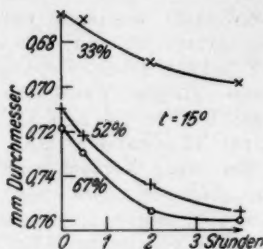


Fig. 5. Härteisothermen von Zn bei 15°

gestellt. Wie man aus ihr ersieht, erholt sich die Härte im Temperaturintervall +5° bis +30°. Dieses Intervall scheint sich mit abnehmendem Walzgrade zu verbreitern, wird aber

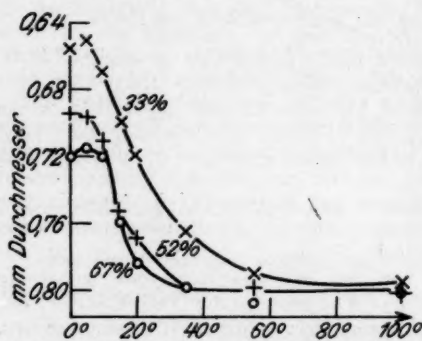


Fig. 6. Erholung der Härte von Zn

Zeit deutlicher wurde, daß aber diese Teile unter sich fast gleich reflektierten. Von +10° an entstanden neue sehr feine Körner, die beim Drehen verschieden reflektierten. Bei weiterem Erhitzen bis 100° nahm die Korngröße nur wenig zu.

Walzt man Zn „Kahlbaum“ bei 20° (Walzgrad 67%), so erholt sich seine Härte schon größtenteils während des Walzvorganges, und gleich nach dem Walzen haben sich kleine neue Kristallite gebildet, die nach dem Ätzen beim Drehen

nicht wie bei Cu, Ag und Au mit wachsendem Walzgrade zu tieferen Temperaturen verschoben.

Die Untersuchung des Kornes der Zn-Plättchen durch Ätzung mit Ammonpersulfatlösung ergab, daß schon bei +5° eine Unterteilung der Walzlamellen eingetreten war und mit der

des Plättchens nacheinander aufleuchten. Nach dem Erhitzen bis auf 200° nahm die Härte noch merklich ab (um etwa 20% des Wertes bei 200°), während die Korngröße bis 200° ein wenig zunahm (von 0,002 auf etwa 0,01 mm²). Bei 250° bildeten sich in der feinkörnigen Grundmasse Riesenkörner bis 5 mm², und dementsprechend fielen die Kugeleindrücke sehr verschieden aus. Nach dem Erhitzen auf 350° bestand das Zinkplättchen aus großen Kristalliten von etwa 0,5 mm², die Härte hatte aber ungefähr denselben Wert wie nach dem Erhitzen auf 200° . Die bei etwa 250° einsetzende Grobkörnigkeit des Zinks hat also keinen wesentlichen Einfluß auf seine Eindruckhärte.

Bei einem anderen sehr reinen Zink (99,98884%), das bei 20° um 76% gewalzt war, wurde eine Abnahme der Härte und der Auflösungsgeschwindigkeit von 20– 150° gefunden¹⁾, während seine Korngröße bis 250° wenig und oberhalb 250° stark zunimmt. Die Abnahme der Härte von 20– 150° beträgt nur etwa 20% der Endhärte bei 350° . Man darf also annehmen, daß auch bei dieser Zinksorte sich die Härte teilweise schon während des Walzens bei 20° erholte.

Walzt man dagegen bei tieferen Temperaturen (Zn „Kahlbaum“, Walzgrad 67%, Walztemperatur -10°), so ist die Härtesteigerung gleich nach dem Walzen erheblich größer (52%). Nach dem Erwärmen auf 20° war die Härte im Verlaufe von 4 Monaten bereits um 47% gesunken, während der restliche Abfall um 5% bei der Temperaturerhöhung bis 200° allmählich erfolgte. Die Erholung der Härte nach dem Warmwalzen (bei $+20^{\circ}$) vollzieht sich also bei gleicher Temperatur langsamer als die nach dem Kaltwalzen (-10 bis 0°).

A. Burkhardt und G. Sachs fanden²⁾, daß die Dehnung und Zerreißfestigkeit von Elektrolytzink (99,97% Zn, bei 160° vorgewalzt und dann um 50% kalt gewalzt) zwischen 100° und 200° abnahmen. Da bei der Erholung der übrigen Metalle die Dehnung stets zunimmt, so ist die beobachtete Abnahme der Dehnung und Zerreißfestigkeit des Zn wohl nicht auf eine Erholung von der Kaltbearbeitung, sondern auf ein Sprödwerden des Materials zwischen 100 und 200° zurückzuführen.

Im Temperaturgebiet der Erholung der Härte von $+5^{\circ}$ bis $+30^{\circ}$ (Fig. 6) ändert sich die Korngröße nicht wesentlich. Der Härteabfall der Walzstreifen kann also nicht durch eine

1) G. Tammann u. F. Neubert, Ztschr. anorg. u. allg. Chem. 207. S. 91. 1932.

2) A. Burkhardt u. G. Sachs, Metallwirtschaft 12. S. 325. 1933.

Vergrößerung des Kornes mit wachsender Temperatur bedingt sein, sondern muß auf die Erholung des Zinks von der Kaltbearbeitung zurückgeführt werden.

Das Temperaturintervall der Härteerholung ($+5^{\circ}$ bis $+30^{\circ}$) fällt nahezu mit dem der Widerstandserholung (-8° bis $+15^{\circ}$) zusammen.

4. Die Erholung der Härte von Pb, Sn und Cd

A. Molnar¹⁾ stauchte Zylinder aus Pb, Sn und Cd bei Temperaturen von -75° bis $+100^{\circ}$ und verfolgte die Härteänderung mit der Zeit bei den verschiedenen Stauchtemperaturen. Auf Grund dieser Versuche gab er folgende Enthärtungsintervalle an:

	Enthärtungsintervall	Temperatur, bei der der Einfluß der Torsion auf den Widerstand verschwindet
Pb	-40 bis $+50^{\circ}$	etwa 20°
Sn	-20 „ $+50^{\circ}$	„ 20°
Cd	-40 „ $+25^{\circ}$	„ 20°

Beim Stauchen von Pb unterhalb -40° behält demnach das Pb dauernd seine Härte und beim Stauchen über 50° wird es überhaupt nicht gehärtet.

Mit den von A. Molnar angegebenen Temperaturen, bei denen eine Härtung durch Stauchen nicht mehr eintritt, sind in der vorstehenden Tabelle verglichen die Temperaturen, bei denen während der Torsion eine vollständige Erholung des elektrischen Widerstandes eintritt. Die Temperaturen der Enthärtung bei Pb und Sn liegen etwa 30° höher als die der Widerstandserholung. Diese Unterschiede sind wohl bedingt durch die Verschiedenheit der untersuchten Metallproben.

5. Die Erholung des Magnesiums

Die Erholungskurven der Härte H_B , des elektrischen Widerstandes $\frac{\Delta W}{W} \cdot 100$, der elastischen Spannung ϵ und der Biegezahl B_z von Mg sind in Fig. 7 dargestellt.

Die Erholung der Härte in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur wurde ebenso wie beim Zn (S. 683) verfolgt, und zwar an einem sehr reinen Magnesium²⁾, das um 10, bzw. 25% kalt gewalzt war. Man ersieht aus den Kurven H_B ,

1) A. Molnar, Rev. Métallurgie 27. S. 522. 1930.

2) Dieses Material enthielt 99,92% Mg, Rest Fe, Si, Mn, Al, Cu. Wir verdanken es Herrn Dr. G. Siebel, I. G. Farbenindustrie, Bitterfeld.

Fig. 7, daß sich die Härte des kaltgewalzten Mg von 100 bis etwa 300° erholt, $t_w = 150^{\circ}$. Das um 25% gewalzte Plättchen hat sowohl vor wie nach dem Erhitzen eine etwas höhere Härte als das um 10% gewalzte. Die Temperatur des Wendepunktes wird mit steigendem Walzgrade beim Mg ebenso wie beim Zn, im Gegensatz zum Cu, Ag und Au, nicht wesentlich erniedrigt.

An einer anderen Sorte Mg (52% kalt gewalzt) wurde eine Abnahme der Härte und der Auflösungsgeschwindigkeit zwischen 200 und 300° gefunden.¹⁾

E. Schmid und G. Siebel führten Warmdehnungsversuche an Mg-Einkristallen aus und fanden, daß bei 100° die Erholung während der Dehnung sehr gering, bei 250° aber sehr beträchtlich ist.²⁾

Nach dem Erhitzen der harten, um 25% gewalzten Mg-Plättchen bis auf 150° und dem Ätzen derselben mit 5%iger Phosphorsäurelösung konnte ein neues Korn nicht erkannt werden. Erst nach dem Erhitzen auf 210° wurde ein sehr feines Rekristallisationskorn sichtbar (etwa 1000 pro mm^2). Das Korn war nach dem Erhitzen auf 300° wenig (500 pro mm^2) und nach dem Erhitzen auf 400° beträchtlich gewachsen (40 pro mm^2). Ein neues Korn tritt also beim Mg erst hervor, nachdem die Härte sich schon weitgehend erholt hat. Das bei Temperaturen zwischen 300 und 400° beobachtete starke Kornwachstum hat ebenso wie beim Zn keinen weiteren Härteabfall zur Folge.

In Übereinstimmung mit diesen Ätzversuchen wurde auch auf röntgenographischem Wege die Bildung eines neuen Korns bei 200– 220° beobachtet.³⁾

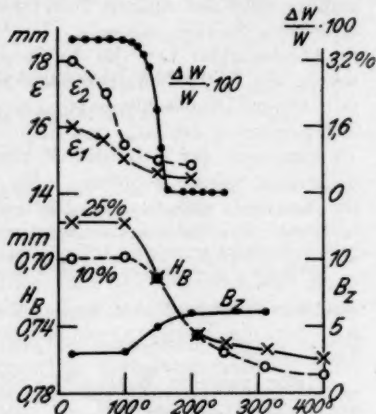


Fig. 7. Erholung von Mg

1) G. Tammann u. F. Neubert, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 207. S. 87. 1932.

2) E. Schmid u. G. Siebel, Ztschr. Elektrochem. 37. S. 450. 1931.

3) Nach einer Mitteilung von Herrn Dr. Siebel.

Um die elastische Spannung (Federkraft) des Magnesiums zu bestimmen, wurde ein bei 600° ausgeglühtes Plättchen (99,92% Mg) um 90% kaltgewalzt, um einen Glasstab gewunden und der äußere Durchmesser der sich beim Aufrollen bildenden Spirale gemessen. Um die Erholung der Federkraft in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur zu bestimmen, wurde die bei 20° aufgerollte Spirale an den Stab gedrückt, mit einer Drahtschlinge fixiert, auf stufenweise gesteigerte Temperaturen erhitzt, und nach dem Abkühlen jedesmal der Durchmesser der sich nach Entfernung der Drahtschlinge aufrollenden Spirale gemessen. So ergab sich für das reine Mg die Kurve ε_1 und für ein Mg-Band die Kurve ε_2 , Fig. 7. Mit wachsender Erhitzungstemperatur nimmt der Durchmesser der sich aufrollenden Spirale und damit ihre Federkraft ab, und nach dem Erhitzen auf 200° rollt sich die Spirale nicht mehr auf, die Federkraft hat sich völlig erholt. Die Temperatur t_w , bei der die Erhitzungstemperatur den größten Einfluß hat, liegt bei 90° .

Für dasselbe Mg-Band wurde die Erholung des elektrischen Widerstandes und der Thermokraft bei langsamer Temperatursteigerung (2° pro Min.) bestimmt. Die Kurve $\frac{\Delta W}{W} \cdot 100$ bezieht sich auf die Erholung des Widerstandes, sie vollzieht sich zwischen 110 und 175° , $t_w = 150^\circ$. In dem gleichen Temperaturintervall erholt sich auch die Thermokraft.¹⁾

Um die Erholung der Biegezahl in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur zu bestimmen, wurden Stücke des Mg-Bandes je 0,5 Std. auf die in Fig. 7 angegebenen Temperaturen erhitzt. Die Bestimmung der Biegezahl B_z wurde bei 20° vorgenommen, indem die Stücke des Mg-Bandes, eingeklemmt zwischen zwei abgerundete Backen, um je 90° bis zum Bruch hin- und hergebogen wurden. Die Biegezahl nimmt von 100° bis 200° zu, $t_w = 150^\circ$ (Kurve B_z , Fig. 7).

Beim Mg erholen sich also die elastische Spannung, die Härte, die Biegezahl, der elektrische Widerstand und die Thermokraft fast in demselben Temperaturintervall, nämlich von $20-200^\circ$ bzw. $100-300^\circ$, $t_w = 90-150^\circ$.

1) G. Tammann u. G. Bandel, Ann. d. Phys. [5] **16**. S. 120. 1933.
Göttingen, Institut f. physik. Chemie.

(Eingegangen 16. Januar 1934)